

## II DEO

# DINAMIKA PROCESA I DRUGIH ELEMENATA SISTEMA UPRAVLJANJA

Pri upravljanju procesima, od posebnog značaja je poznavanje njihovih karakteristika koje definišu njihovo ponašanje u nestacionarnom režimu rada pri kome se javljaju vremenske promene procesnih veličina. Ove karakteristike se podrazumevaju pod pojmom *dinamika procesa*. Da bi se izvršila analiza ponašanja procesnog sistema i da bi se dali odgovori na pitanja koja se postavljaju pri projektovanju sistema za njegovo upravljanje, potrebno je da se fizičko-hemijski fenomeni koji se javljaju u procesu matematički predstavljaju, odnosno da se sačini njegov *matematički model*. Postavljanjem matematičkog modela vrši se *identifikacija procesa*. Matematički model koji opisuje sistem u nestacionarnom režimu rada naziva se *dinamički model*. Poznavanje dinamičkog modela procesa koji predstavlja objekat upravljanja je vrlo važno za pravilan izbor i projektovanje elemenata sistema automatskog upravljanja, da bi se postigao željeni kvalitet upravljanja. Značaj dinamike procesa je naročito porastao poslednjih decenija sa ekspanzijom računarske tehnike koja omogućuje projektovanje vrlo složenih i sofisticiranih sistema upravljanja uz korišćenje računara. Pri projektovanju ovakvih sistema upravljanja, dobro poznavanje dinamike procesa je najznačajniji faktor.

Pored dinamike procesa, potrebno je poznavanje i dinamike ostalih elemenata sistema upravljanja, jer svi oni zajedno utiču na ponašanje čitavog sistema. Pri tome se pravilan izbor ostalih elemenata sistema upravljanja u pogledu njihove dinamike, zasniva na poznavanju dinamike samog procesa. Iako će u ovom poglavlju najveća pažnja biti posvećena dinamici procesa, sa naglaskom da specifičnim karakteristikama objekata upravljanja koji se javljaju u postrojenjima procesne industrije, sve što će biti rečeno u vezi sa dobijanjem dinamičkih modela, klasifikaciji sistema i dinamičkim ponašanjem sistema, može se praktično primeniti na bilo koji element sistema upravljanja ili na sistem u celini.

Kako se izbor i projektovanje regulatora u sistemu upravljanja zasniva upravo na definisanim zahtevima u pogledu njegove dinamike, o dinamici regulatora će biti više govora u poglavljima koja se odnose na projektovanje različitih konfiguracija sistema upravljanja.

Dinamički modeli sistema se najčešće prikazuju u četiri različita domena koji zavise od načina definisanja nezavisno i zavisno promenljivih: u vremenskom, kompleksnom ili Laplasovom (Laplace), frekventnom i diskretnom domenu.

U *vremenskom domenu* dinamički model se prikazuje u obliku jedne ili sistema diferencijalnih jednačina koji daje vezu između izlaznih promenljivih (zavisno promenljive) i vremena (nezavisno promenljiva).

U *Laplasovom (kompleksnom) domenu* dinamički model se prikazuje u obliku prenosne funkcije sistema koja se dobija primenom Laplasove transformacije na model u vremenskom domenu. U ovom modelu, nezavisno promenljiva je Laplasova kompleksna promenljiva  $s$ .

U *frekventnom domenu* dinamički model se prikazuje u obliku frekventnih, odnosno, amplitudno-faznih karakteristika, koje se najčešće prikazuju grafički u obliku Bodeovih, Nikvistovog ili Nikolsovog dijagrama. Nezavisno promenljiva je frekvencija (učestanost).

U *diskretnom domenu* dinamički modeli se prikazuju u obliku funkcija diskretnog prenosa. Nezavisno promenljiva je kompleksna promenljiva z-transformacije  $z$ .

## 2.1. DINAMIKA SISTEMA U VREMENSKOM DOMENU

Pošto definiše ponašanje sistema u nestacionarnom režimu, dinamički model se uvek dobija u obliku jedne ili sistema diferencijalnih jednačina, kod kojih se kao jedna nezavisna promenljiva obavezno javlja vreme. Definisanjem početnih uslova za sve promenljive i vremenskih promena ulaznih promenljivih, integracijom se dobijaju vremenske promene izlaznih promenljivih, koje se nazivaju odzivi sistema.

### 2.1.1. Klasifikacija dinamičkih modela

*Prema načinu dobijanja*, dinamički modeli se mogu podeliti na teorijske i empirijske.

*Teorijski* modeli se dobijaju postavljanjem matematičkih zavisnosti zasnovanih na teorijskoj analizi fenomena koji se javljaju u sistemu.

*Empirijski* modeli se dobijaju fitovanjem eksperimentalnih podataka matematičkim izrazima definisanog oblika. Empirijski modeli se mogu dobiti samo za sisteme koji su već fizički realizovani.

*Na osnovu rigoroznosti*, modeli se mogu podeliti na determinističke i stohastičke.

*Deterministički* modeli su oni kod kojih se svakoj promenljivoj ili parametru može dodeliti određeni broj, ili serija određenih brojeva, za bilo koji zadati set uslova.

*Stohastički* modeli su oni kod kojih promenljive ili parametri koji se koriste za definisanje odnosa između ulaza i izlaza nisu poznati tačno, već sa određenom, poznatom, verovatnoćom.

Pored toga, može se izvršiti klasifikacija sistema na osnovu *vrste i oblika modela*:

1. Na osnovu *broja nezavisno promenljivih* koje se javljaju u modelu, sistemi se dele na sisteme sa nagomilanim parametrima i sisteme sa raspoređenim parametrima.

*Sistemi sa nagomilanim (koncentrisanim) parametrima* su oni kod kojih se može smatrati da su sve procesne veličine uniformne u celoj zapremini sistema, ili u pojedinim delovima zapremine sistema i da se ne moraju posmatrati njihove promene po prostornim koordinatama, tako da je vreme jedina nezavisno promenljiva. Dinamički modeli ovakvih sistema se dobijaju u obliku jedne ili sistema običnih diferencijalnih jednačina. Tipični primeri ovakvih sistema su svi sudovi sa mešanjem (mešači, grejači sa mešanjem, reaktori sa mešanjem), kao i uređaji sa stupnjevima (kolone sa podovima i slično).

*Sistemi sa raspoređenim (distribuiranim) parametrima* su oni kod kojih je neophodno uzeti u obzir i promene procesnih veličina po prostornim koordinatama, tako da se kao nezavisno promenljive javljaju vreme i jedna ili više prostornih koordinata. Dinamički modeli ovakvih sistema se prikazuju jednom ili sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina. Tipični primeri ovakvih sistema su uređaji sa klipnim ili približno klipnim strujanjem (razmenjivači toplote tipa cev u cevi ili omotač i cevi, cevni reaktor i slično), kao i uređaji sa pakovanim slojem (apsorpcione, rektifikacione i ekstrakcione kolone sa punjenjem, adsorpcione kolone, katalitički reaktori sa pakovanim slojem i slično).

2. Na osnovu *linearnosti modela*, sistemi se dele na linearne i nelinearne.

*Linearni* sistemi su oni koji se mogu opisati jednom ili sistemom linearnih diferencijalnih jednačina sa linearnim graničnim uslovima. Analogno, ako se dinamički model sistema definiše preko operatora  $H$  koji daje vezu između izlaza (2.1-1) i ulaza:

sistem će biti linearan ukoliko je operator  $H$  linearan, odnosno ako važi:

$$y = H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2 \quad (2.1-2)$$

*Nelinearni* sistemi su oni koji se opisuju nelinearnim diferencijalnim jednačinama, odnosno nelinearnim operatorima.

3. Na osnovu *reda jednačine* kojom je opisan dinamički model sistema, sistemi se dele na:

- sisteme prvog reda
- sisteme drugog reda
- sisteme višeg reda.

4. Na osnovu *oblasti definisanisanosti* modeli sistema mogu biti kontinualni ili diskretni.

*Kontinualni* modeli su oni kod kojih su promenljive stanja definisane za sve vrednosti vremenske promenljive.

*Diskretni* modeli su oni kod kojih su promenljive stanja definisane samo za određene, diskretne vrednosti vremenske promenljive.

Na osnovu fenomena koji se u procesu odigravaju, u postrojenjima procesne industrije se najčešće javljaju:

- procesi sa prenosom količine kretanja
- procesi sa prenosom toplote
- procesi sa prenosom mase
- procesi sa simultanim prenosom toplote i mase
- procesi sa hemijskom i/ili biohemijskom reakcijom
- složeni procesi u kojima se istovremeno javlja više fenomena.

U ovoj knjizi ćemo se uglavnom baviti determinističkim modelima sistema koji se najčešće javljaju u postrojenjima procesne industrije. Uglavnom ćemo se ograničiti na kontinualne, linearne sisteme sa nagomilanim parametrima.

### 2.1.2. Formiranje teorijskih determinističkih modela

Formiranju teorijskog determinističkog modela se pristupa u slučajevima kada su poznati fizičko-hemijski fenomeni koji se odigravaju u posmatranom sistemu. Teorijski model se sastoji od matematičkih jednačina kojima se adekvatno opisuju ovi fenomeni.

Da bi se teorijski definisao sistem i njegovo ponašanje, potrebno je definisati:

1. skup fundamentalno međusobno zavisnih veličina čije vrednosti opisuju stanje sistema, koje se nazivaju *veličine stanja*;

2. skup jednačina koje povezuju veličine stanja i daju njihovu zavisnost od nezavisno promenljivih (vremena i prostornih koordinata), koje se nazivaju *jednačine stanja*. Jednačine stanja se dobijaju matematičkom formulacijom osnovnih fizičko-hemijskih zakona koji važe za taj sistem.

Pri postavljanju matematičkog modela koji opisuje ponašanje sistema u nestacionarnom stanju (dinamičkog modela), prvo treba definisati bilansne jednačine koje se mogu prikazati sledećim najopštijim oblikom:

$$(ULAZ) - (IZLAZ) + (IZVOR) - (PONOR) = AKUMULACIJA$$

S obzirom na fenomene koji se u njima javljaju, za procese hemijske i srodnih industrija, u principu najpre treba definisati sledeće bilansne jednačine:

(1) *Jednačinu ukupnog materijalnog bilansa (jednačinu kontinuiteta).*

(2) *Jednačine materijalnih bilansa pojedinih komponenata. Za N-komponentni sistem, treba definisati N-1 jednačinu ovog oblika (plus jednačinu ukupnog materijalnog bilansa).*

(3) *Jednačinu energetskog bilansa.*

(4) *Jednačinu kretanja (bilans količine kretanja).*

Treba naglasiti da način postavljanja svih bilansnih jednačina koje su napred pomenute zavisi od toga da li se radi o sistemu sa nagomilanim ili sa raspoređenim parametrima. Naime, za sisteme sa nagomilanim parametrima bilansne jednačine se postavljaju u odnosu na ukupnu zapreminu sistema, odnosno deo zapremine u kome su sve promenljive uniformne, pri čemu se kao rezultat dobijaju obične diferencijalne jednačine. Kod sistema sa raspoređenim parametrima, bilansi se postavljaju za mali element zapremine sistema, tako da se posle uzimanja graničnih vrednosti kada taj element postaje beskonačno mali, dobijaju parcijalne diferencijalne jednačine.

(5) *Transportne jednačine* koje definišu brzine prenosa količine kretanja, toplote i mase. Jednačine molekulskog prenosa i jednačine ukupnog prenosa.

(6) *Jednačine hemijske termodinamike*, kojima se definišu gustine i entalpije svih faza, u funkciji pritiska,

temperature i sastava.

(7) *Jednačine ravnoteže*, koje mogu da budu: jednačine hemijske ravnoteže i jednačine ravnoteže faza.

(8) *Jednačine hemijske kinetike* koje definišu brzinu hemijske reakcije.

**PRIMER 2.1-1.** Postavljanje jednačina ukupnog materijalnog bilansa za sistem sa nagomilanim i sa raspoređenim parametrima

Postaviti jednačine ukupnog materijalnog bilansa za protočni sistem (a) sa nagomilanim parametrima i (b) sa raspoređenim parametrima u koji ulazi struja fluida sa promenljivim protokom.

(a) Kao sistem sa nagomilanim parametrima ćemo posmatrati protočni sud u kome postoji idealno mešanje, šematski prikazan na slici P-2.1.1-1. Jednačina ukupnog materijalnog bilansa ima oblik:

$$F_i \rho_i - F \rho = \frac{d}{dt}(\rho V) \quad (\text{P-2.1.1-1})$$

U gornjoj jednačini i na slici P-2.2.2-1. su korišćene sledeće oznake:  $t$  - vreme,  $V$  - zapremina tečnosti u sudu,  $F_i$  - ulazni protok,  $F$  - izlazni protok,  $\rho_i$  - gustina ulazne struje,  $\rho$  - gustina tečnosti u sudu i u izlaznoj struji i  $A$  - površina poprečnog preseka suda.

Za većinu tečnih sistema, može se smatrati da je gustina približno konstantna, tako da se ova jednačina svodi na:

$$F_i - F = \frac{dV}{dt} \quad (\text{P-2.1.1-2})$$

odnosno, ako je površina poprečnog preseka suda  $A$  konstantna, na:

$$A \frac{dh}{dt} = F_i - F \quad (\text{P-2.1.1-3})$$

gde je  $h$  visina tečnosti u sudu.

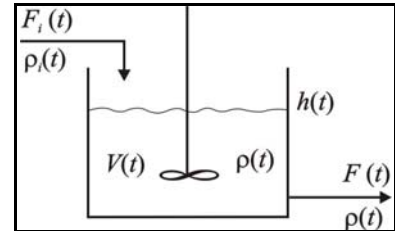
(b) Kao sistem sa raspoređenim parametrima ćemo posmatrati cev u kojoj se javlja klipno strujanje fluida, šematski prikazanu na slici P-2.1.1-2. Kod ovog sistema, materijalni bilans se postavlja za mali element zapremine, prikazan sivom površinom na slici, pri čemu se dobija sledeća diferencijalna jednačina:

$$(vA\rho)_z - (vA\rho)_{z+\Delta z} = \frac{d}{dt}(A\rho\Delta z) \quad (\text{P-2.1.1-4})$$

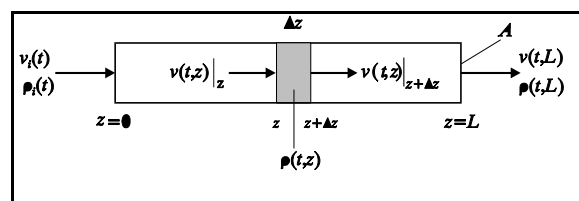
Kada zapremina, odnosno dužina posmatranog elementa  $\Delta z$  teži nuli, jednačina (P-2.1.1-4) prelazi u parcijalnu diferencijalnu jednačinu, koja predstavlja matematički model posmatranog sistema sa raspoređenim parametrima:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = 0 \quad (\text{P-2.1.1-5})$$

U jednačinama (P-2.1.1-4) i (P-2.1.1-5) i na slici P-2.1.1-2. korišćene su sledeće oznake:  $t$  - vreme,  $z$  - aksijalna koordinata,  $v$  - brzina strujanja fluida,  $\rho$  - gustina fluida,  $A$  - površina poprečnog preseka cevi kroz koju struji fluid.



Slika P-2.1.1-1. Šematski prikaz suda sa idealnim mešanjem



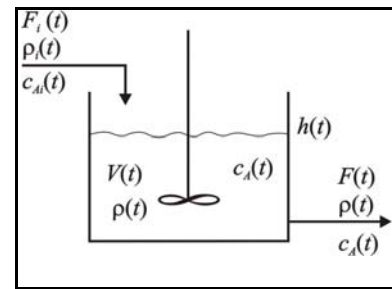
Slika P-2.1.1-2. Šematski prikaz elementa sa klipnim strujanjem

**PRIMER 2.1-2.** Materijalni bilansi po komponentama, za sistem sa nagomilanim i sa raspoređenim parametrima

Postaviti materijalne bilanse po komponenti A, za slučaj izotermne reakcije  $n$ -tog reda, tipa  $A \rightarrow B$ , u reaktoru sa idealnim mešanjem (sistem sa nagomilanim parametrima) i idealnom cevnom reaktoru (sistem sa raspoređenim parametrima).

(a) Za reaktor sa idealnim mešanjem, prikazan na slici P-2.1.2-1., u kome se odigrava reakcija  $n$ -tog reda, jednačina materijalnog bilansa po komponenti A se može napisati u sledećem obliku:

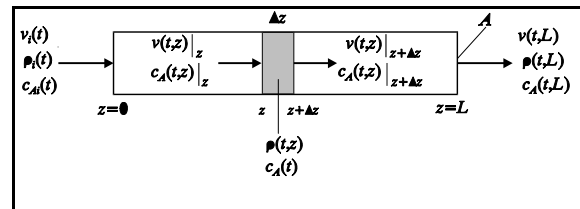
$$F_i c_{Ai} - F c_A - V k c_A^n = \frac{d}{dt}(V c_A) \quad (\text{P-2.1.2-1})$$



Slika P-2.1.2-1. Šematski prikaz reaktora sa idealnim mešanjem

gde je  $c_{Ai}$  koncentracija komponente A u ulaznoj struji,  $c_A$  koncentracija komponente A u reaktoru i izlaznoj struji i  $k$  konstanta brzine reakcije (ostale oznake su identične kao u primeru 2.1-1(a)). Ukoliko je sistem dvokomponentan (A i B) jednačina (P-2.1.2-1), zajedno sa jednačinom ukupnog materijalnog bilansa (P-2.1.1-1), odnosno (P-2.1.1-3), potpuno opisuje ovaj sistem.

(b) Za idealni cevni reaktor (slika P-2.1.2-2.) u kome se odigrava reakcija  $n$ -tog reda, jednačina materijalnog bilansa po komponenti A, za element zapremine  $A \Delta z$  se može napisati u obliku:



Slika P-2.1.2-2. Šematski prikaz cevnog reaktora

$$A \Delta z \frac{d c_A}{dt} = (v A c_A)|_z - (v A c_A)|_{z+\Delta z} - k c_A^n A \Delta z \quad (\text{P-2.1.2-2})$$

Delenjem ove jednačine sa  $A \Delta z$  i nalaženjem granične vrednosti kada element zapremine koji posmatramo postaje beskonačno mali ( $\Delta z \rightarrow 0$ ), dobija se model u obliku parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = - \frac{\partial (v c_A)}{\partial z} - k c_A^n \quad (\text{P-2.1.2-3})$$

Pri postavljanju matematičkog modela sistema se često javljaju problemi, čiji su najčešći uzroci nedovoljno poznavanje fizičko-hemijskih fenomena, nedovoljna pouzdanost vrednosti različitih parametara u modelu i veličina i složenost dobijenog modela.

### 2.1.3. Linearizacija modela i promenljive odstupanja

#### 2.1.3.1. Linearizacija

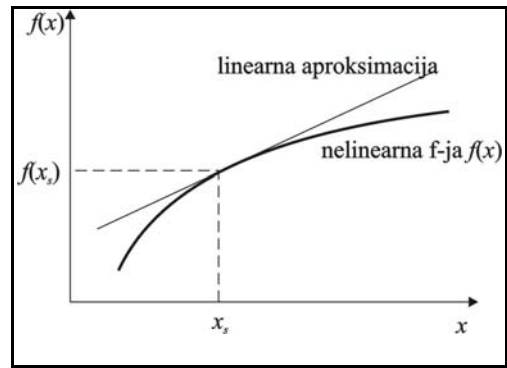
Većina realnih sistema koji se javljaju u procesnoj industriji su nelinearni. Međutim, rad sa nelinearnim modelima i rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina predstavlja vrlo komplikovan problem. S druge strane, aparat linearne analize je vrlo razvijen i lako primenljiv. Zbog toga se pri ispitivanju nelinearnih sistema pristupa linearizaciji modela, kad god je to moguće.

Najčešće korišćen i najjednostavniji način linearizacije modela se svodi na razvijanje svih nelinearnih članova u modelu u Tejlorov (Taylor) red i zanemarivanje svih kvadratnih i članova višeg reda u ovom razvoju.

Za slučaj nelinearne funkcije jedne promenljive,  $f(x)$ , postupak linearizacije je sledeći:

$$f(x) = f(x_s) + \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_s} (x - x_s) + \left( \frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x_s} \frac{(x - x_s)^2}{2!} + \dots \approx f(x_s) + \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_s} (x - x_s) \quad (\text{2.1-19})$$

Na slici 2.1-1. je ilustrovano geometrijsko značenje linearizacije nelinearne funkcije jedne promenljive. Linearizacijom zapravo nelinearnu funkciju  $f(x)$  aproksimiramo njenom tangentom u tački  $x_s$  oko koje se vrši razvijanje u Tejlorov red. U okolini te tačke, ova aproksimacija je dosta dobra, da bi sa udaljavanjem (sa povećavanjem razlike  $(x-x_s)$ ) postajala sve lošija. Kada se vrši linearizacija dinamičkog modela procesa, razvijanje u Tejlorov red se vrši oko radne tačke koja je definisana vrednostima promenljivih koje odgovaraju optimalnom stacionarnom stanju u kome treba održavati rad procesa. Ukoliko je rad sistema zadovoljavajući, odnosno ukoliko vrednosti promenljivih ne odstupaju značajno od svojih isprojektovanih optimalnih vrednosti, aproksimacija nelinearnih funkcija Tejlorovim redom prvog stepena će biti zadovoljavajuća, odnosno moći ćemo sa dovoljnom pouzdanošću da izvodimo zaključke o dinamici nelinearnog sistema na osnovu njegovog linearizovanog modela.



Slika 2.1-1. Geometrijska interpretacija linearizacije nelinearne funkcije

Za nelinearnu funkciju dve promenljive  $f(x,y)$ , jednačina (2.1-19) se može generalizovati:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & f(x_s, y_s) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_s, y_s} (x - x_s) + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_s, y_s} (y - y_s) + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{x_s, y_s} \frac{(x - x_s)^2}{2!} \\
 & + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x_s, y_s} \frac{(y - y_s)^2}{2!} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_s, y_s} (x - x_s)(y - y_s) + \dots \quad (2.1-20) \\
 \approx & f(x_s, y_s) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_s, y_s} (x - x_s) + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_s, y_s} (y - y_s)
 \end{aligned}$$

U ovom slučaju, radna tačka je definisana vrednostima promenljivih  $x$  i  $y$  u stacionarnom stanju u kome treba voditi proces  $(x_s, y_s)$ .

Izraz za linearizaciju nelinearne funkcije se može dalje generalizovati za funkciju tri i više promenljivih.

**PRIMER 2.1-3.** Linearizacija materijalnog bilansa po komponenti  $A$ , za izotermni protočni reaktor sa idealnim mešanjem i konstantnom zapreminom, u kome se odigrava reakcija  $n$ -tog reda

Jednačinu materijalnog bilansa izoternog protočnog reaktora sa idealnim mešanjem i reakcijom  $n$ -tog reda, po komponenti  $A$  smo izveli u primeru 2.1-2. (jednačina (P-2.1.2-1)). Za slučaj konstantne zapremine, ova jednačina se može napisati u obliku:

$$V \frac{dc_A}{dt} = F c_{Ai} - F c_A - V k c_A^n \quad (P-2.1.3-1)$$

(Za  $V = \text{const}$ , na osnovu jednačine ukupnog bilansa izvedene u primeru 2.1-1. (jednačina (P-2.1.1-2)) je  $F_i = F$ .) U ovoj jednačini, pored vremena kao nezavisno promenljive, imamo tri promenljive: dve ulazne,  $F$  i  $c_{Ai}$ , i jednu izlaznu,  $c_A$ . Desna strana jednačine (P-2.1.3-1) se sastoji od tri člana, od kojih prva dva sadrže promenljivi parametar  $F$ , a treći je nelinearan. Da bi se ova jednačina prevela u linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima, koja se jednostavno rešava, treba izvršiti linearizaciju sva tri člana na desnoj strani jednačine. Postupak linearizacije je prikazan sledećim jednačinama:

- za prvi član ( $F c_{Ai}$ ):

$$F c_{Ai} = f_1(F, c_{Ai}) \approx F_s c_{Ai,s} + F_s (c_{Ai} - c_{Ai,s}) + c_{Ai,s} (F - F_s) \quad (P-2.1.3-2)$$

- za drugi član ( $F c_A$ ):

$$F_{c_A} = f_2(F, c_A) \approx F_s c_{A,s} + F_s (c_A - c_{A,s}) + c_{A,s} (F - F_s) \quad (\text{P-2.1.3-3})$$

- za treći član ( $Vkc_A^n$ ):

$$Vkc_A^n = f_3(c_A) \approx Vkc_{A,s}^n + Vkn c_{A,s}^{n-1} (c_A - c_{A,s}) \quad (\text{P-2.1.3-4})$$

Zamenom ovih linearnih aproksimacija u jednačinu (P-2.1.3-1) dobijamo linearizovanu jednačinu izotermnog reaktora sa idealnim mešanjem i reakcijom  $n$ -tog reda:

$$V \frac{dc_A}{dt} = [F_s c_{A_i,s} + F_s (c_{A_i} - c_{A_i,s}) + c_{A_i,s} (F - F_s)] - [F_s c_{A,s} + F_s (c_A - c_{A,s}) + c_{A,s} (F - F_s)] - V k [c_{A,s}^n + n c_{A,s}^{n-1} (c_A - c_{A,s})] \quad (\text{P-2.1.3-5})$$

Iako ova jednačina na prvi pogled izgleda komplikovanija od polazne nelinearne jednačine (P-2.1.3-1), njeno rešavanje je mnogo jednostavnije.

**PRIMER 2.1-4.** Linearizacija materijalnog bilansa po komponenti A, za neizotermni protočni reaktor sa idealnim mešanjem, konstantnom zapreminom i reakcijom  $n$ -tog reda

Ukoliko imamo neizotermni reaktor, konstanta brzine reakcije  $k$  nije konstantna, već je funkcija temperature definisana Arenijusovom jednačinom:

$$k = A_a e^{-E_a/RT}$$

gde je  $T$  temperatura,  $E_a$  energija aktivacije,  $R$  univerzalna gasna konstanta i  $A_a$  predeksponencijalni faktor. U ovom slučaju, jednačina materijalnog bilansa protočnog reaktora sa idealnim mešanjem po komponenti A ima oblik:

$$V \frac{dc_A}{dt} = F c_{A_i} - F c_A - V A_a e^{-E_a/RT} c_A^n \quad (\text{P-2.1.4-1})$$

Treba primetiti da je za kompletan dinamički model ovog sistema neophodno definisati i jednačinu toplotnog bilansa. U jednačini (P-2.1.4-1) imamo četiri promenljive ( $F$ ,  $c_{A_i}$ ,  $c_A$  i  $T$ ). Prva dva člana na desnoj strani ove jednačine su identični kao u prethodnom primeru, dok se treći razlikuje i funkcija je dve promenljive ( $c_A$  i  $T$ ). Linearizacijom ovog člana se dobija sledeći izraz:

$$V A_a e^{-E_a/RT} c_A^n \approx V A_a e^{-E_a/RT_s} c_{A,s}^n + V A_a e^{-E_a/RT_s} n c_{A,s}^{n-1} (c_A - c_{A,s}) + V A_a e^{-E_a/RT_s} c_{A,s}^n \frac{E_a}{RT_s^2} (T - T_s) \\ = V k_s c_{A,s}^n + V k_s n c_{A,s}^{n-1} (c_A - c_{A,s}) + \frac{V k_s E_a c_{A,s}^n}{RT_s^2} (T - T_s) \quad (\text{P-2.1.4-2})$$

( $k_s$  je konstanta brzine reakcije koja odgovara temperaturi u radnoj tački.) Zamenom linearizovanih članova definisanih jednačinama (P-2.1.3-2), (P-2.1.3-3) i (P-2.1.4-2) u jednačinu (P-2.1.4-1), dobija se linearizovani oblik jednačine materijalnog bilansa neizotermnog protočnog reaktora sa idealnim mešanjem i reakcijom  $n$ -tog reda:

$$V \frac{dc_A}{dt} = [F_s c_{A_i,s} + F_s (c_{A_i} - c_{A_i,s}) + c_{A_i,s} (F - F_s)] - [F_s c_{A,s} + F_s (c_A - c_{A,s}) + c_{A,s} (F - F_s)] - V k_s c_{A,s}^{n-1} [c_{A,s} + n (c_A - c_{A,s}) + \frac{c_{A,s} E_a}{RT_s^2} (T - T_s)] \quad (\text{P-2.1.4-3})$$

### 2.1.3.2. Promenljive odstupanja

Vrlo često je pri analizi dinamike sistema mnogo pogodnije umesto pravih vrednosti promenljivih koristiti njihova odstupanja od stacionarnog stanja, koja se definišu na sledeći način:

$$x^p(t) \equiv x(t) - x_s \quad (2.1-21)$$

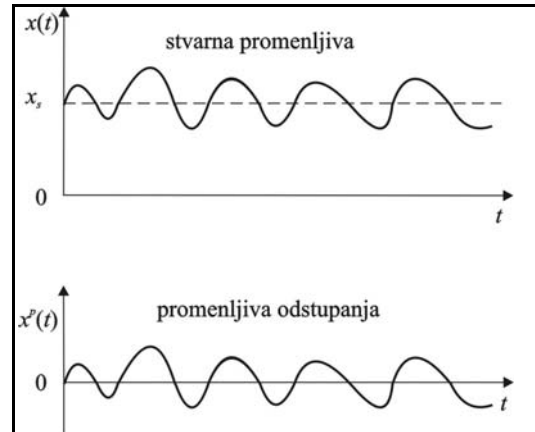
Ovako definisane promenljive nazivamo *promenljive odstupanja*. Ove promenljive se često nazivaju i *perturbacione* ili *devijacione* promenljive. Pošto su stvarne promenljive u sistemu funkcije vremena, to isto važi i za promenljive odstupanja.

Grafički prikaz jedne stvarne i odgovarajuće promenljive odstupanja je dat na slici 2.1-2.

Osnovni razlozi za uvođenje promenljivih odstupanja su što se dobijene linearizovane diferencijalne jednačine pojednostavljuju, i to na dva načina:

1. članovi jednačine koji su konstantni otpadaju
2. ako se posmatra sistem koji se na početku nalazi u stacionarnom stanju kojim je definisana radna tačka, početni uslovi za promenljive odstupanja su jednaki nuli.

Da bi ovo ilustrovali, linearizovane jednačine modela, dobijene u primerima 2.1-3. i 2.1-4. ćemo izraziti preko promenljivih odstupanja.



Slika 2.1-2. Poređenje stvarne i promenljive odstupanja

**PRIMER 2.1-5.** Linearizovana jednačina materijalnog bilansa po komponenti  $A$ , za izotermni protočni reaktor sa idealnim mešanjem, konstantnom zapreminom i reakcijom  $n$ -tog reda, izražena preko promenljivih odstupanja

Ako se u jednačini (P-2.1.3-5) sve promenljive izraze u obliku zbira odgovarajuće promenljive odstupanja i vrednosti u stacionarnom stanju:

$$F = F^p + F_s, \quad c_{Ai} = c_{Ai}^p + c_{Ai,s}, \quad c_A = c_A^p + c_{A,s} \quad (P-2.1.5-1)$$

dobija se sledeća jednačina:

$$V \frac{dc_A^p + dc_{A,s}}{dt} = [F_s c_{Ai,s} + F_s c_{Ai}^p + c_{Ai,s} F^p] - [F_s c_{A,s} + F_s c_A^p + c_{A,s} F^p] - V k [c_{A,s}^n + n c_{A,s}^{n-1} c_A^p] \quad (P-2.1.5-2)$$

Ako se podsetimo da je  $c_{A,s}$  konstanta, tako da je njen izvod po vremenu jednak nuli, i ako grupišemo sve konstantne članove na desnoj strani jednačine, dobijamo:

$$V \frac{dc_A^p}{dt} = [F_s c_{Ai,s} - F_s c_{A,s} - V k c_{A,s}^n] + F_s c_{Ai}^p + c_{Ai,s} F^p - F_s c_A^p + c_{A,s} F^p - V k n c_{A,s}^{n-1} c_A^p \quad (P-2.1.5-3)$$

Član u uglastoj zagradi, na desnoj strani ove jednačine, zapravo predstavlja akumulaciju komponente  $A$  u stacionarnom stanju, i jednak je nuli. Tako dobijamo konačni oblik linearizovane jednačine materijalnog bilansa po komponenti  $A$ , za reaktor sa idealnim mešanjem i reakcijom  $n$ -tog reda:

$$V \frac{dc_A^p}{dt} = F_s c_{Ai}^p + c_{Ai,s} F^p - F_s c_A^p + c_{A,s} F^p - V k n c_{A,s}^{n-1} c_A^p \quad (P-2.1.5-4)$$

**PRIMER 2.1-6.** Linearizovana jednačina materijalnog bilansa po komponenti  $A$ , za neizotermni protočni reaktor sa idealnim mešanjem, konstantnom zapreminom i reakcijom  $n$ -tog reda, izražena preko promenljivih odstupanja

Na potpuno analogan način kao u prethodnom primeru, diferencijalna jednačina (P-2.1.4-3), kojom je definisan linearizovani materijalni bilans neizoternog reaktora sa idealnim mešanjem, može se prevesti



u oblik definisan preko promenljivih odstupanja:

$$V \frac{dc_A}{dt} = F_s c_{Ai}^p + c_{Ai,s} F^p - F_s c_A^p + c_{A,s} F^p - V k_s n c_{A,s}^{n-1} c_A^p - V k_s c_{A,s}^n \frac{E_a}{RT_s^2} T^p \quad (\text{P-2.1.6-1})$$

Na osnovu prethodnih primera se može zaključiti da se prelaskom na promenljive odstupanja dobija diferencijalna jednačina koja se od polazne razlikuje samo po odsustvu konstantnih članova i po početnim uslovima koji su jednaki nuli.

**ZAKLJUČAK:** Većina procesnih sistema koji se javljaju u industriji su nelinearni. Međutim, ukoliko dinamički model treba da opiše nestacionarni proces u okolini radne tačke kojom je definisano optimalno stacionarno stanje, može se izvršiti njegova linearizacija bez velikih posledica po verodostojnost modela. Ukoliko se zatim, u linearizovanom modelu umesto stvarnih promenljivih uvedu njihova odstupanja od vrednosti u stacionarnom stanju, približni model sistema sa nagomilanim parametrima se u opštem slučaju može prikazati sistemom običnih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, koje ne sadrže konstantne članove i za koje su svi početni uslovi jednaki nuli. Ovakav sistem jednačina se uvek može svesti na jednu običnu linearnu diferencijalnu jednačinu  $n$ -tog reda sa konstantnim koeficijentima, koja povezuje izlaznu promenljivu  $y$  sa ulaznom promenljivom  $x$ :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (2.1-22)$$

Važno je napomenuti da za sve realne sisteme važi:

$$n \geq m \quad (2.1-23)$$

U jednačini (2.1-22) su zbog jednostavnosti izostavljeni gornji indeksi  $p$ , kojima se označava da se radi o promenljivim odstupanja.

Kada se specificira vremenska zavisnost promene ulaza  $x(t)$ , rešavanjem jednačine (2.1-22) dobija se približni odziv sistema  $y(t)$ , na osnovu koga se može jasno sagledati i predvideti dinamičko ponašanje sistema. Rešavanje obične linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, tipa jednačine (2.1-22), je uvek moguće i relativno je jednostavno. Jedna od najčešće korišćenih metoda za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima pri izučavanju dinamike procesa se zasniva na primeni Laplasove (Laplace) transformacije. Pored jednostavnog rešavanja linearnih diferencijalnih jednačina, Laplasova transformacija omogućuje vrlo jednostavno prikazivanje dinamike sistema, u obliku prenosnih funkcija koje su znatno pogodnije od diferencijalnih jednačina, i razvoj različitih metoda analize i sinteze sistema upravljanja u Laplasovom (kompleksnom) domenu, koje su znatno jednostavnije od odgovarajućih metoda u vremenskom domenu. Zbog toga će sledeće poglavlje ove knjige biti posvećeno Laplasovoj transformaciji i dinamičkim modelima sistema koje se dobijaju njenim korišćenjem.

## 2.2. DINAMIKA SISTEMA U LAPLASOVOM DOMENU

Korišćenje Laplasove transformacije daje vrlo jednostavan i elegantan metod za rešavanje linearnih ili linearizovanih diferencijalnih jednačina koje se dobijaju kao rezultat matematičkog modelovanja procesa u nestacionarnom režimu.

Primenom Laplasove transformacije, obična linearna diferencijalna jednačina se transformiše u algebarsku, a linearna parcijalna diferencijalna jednačina u običnu linearnu diferencijalnu jednačinu.

Laplasova transformacija takođe omogućuje:

- jednostavno prikazivanje dinamičkog modela sistema koji daje direktnu vezu izlaza i ulaza i koji je vrlo pogodan za korišćenje u upravljanju procesima;
- direktnu kvalitativnu analizu reakcije sistema na različite spoljašnje uticaje.

U nastavku ćemo dati osnove Laplasove transformacije (definiciju, najvažnije osobine i korišćenje).

$$\mathcal{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) \quad (2.2-2)$$

## 2.2.1. Laplasova transformacija

### 2.2.1.1. Definicija Laplasove transformacije

Laplasova transformacija je linearna transformacija koja se definiše sledećim integralom:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.2-1)$$

Pomoću Laplasove transformacije prelazimo iz vremenskog domena, u kome je nezavisno promenljiva vreme  $t$ , u kompleksni, odnosno Laplasov domen, u kome je nezavisno promenljiva kompleksna promenljiva  $s$  (koja se često naziva Laplasova promenljiva). Na taj način se oblast definisanosti svih funkcija prevodi iz jednodimenzionalne u dvodimenzionalnu. Funkcija  $f(t)$  se naziva original, a funkcija  $F(s)$  je njena slika, odnosno njena Laplasova transformacija. Zbog jednostavnijeg praćenja, u daljem izlaganju će u najvećem broju slučajeva originali biti označeni malim slovima, a njihove slike odgovarajućim velikim slovima. Izuzeci će biti procesne promenljive koje se standardno označavaju velikim slovima (na primer temperatura -  $T$  ili protok -  $F$ ), koje će i u vremenskom i u Laplasovom domenu biti označene velikim slovom.

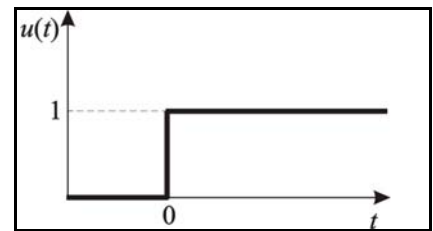
### 2.2.1.2. Laplasove transformacije nekih jednostavnih funkcija

Na nekoliko primera ćemo prikazati nalaženje Laplasovih transformacija nekih jednostavnih, ali značajnih funkcija, po definiciji.

**PRIMER 2.2-1.** Laplasova transformacija jedinične stepenaste funkcije

Jedna od najčešće korišćenih ulaznih funkcija za ispitivanje dinamike procesa je *Hevisajdova (Heaviside) funkcija*, koja se često naziva *jedinična stepenasta* ili *jedinična odskočna funkcija*. Ova funkcija se matematički može izraziti na sledeći način:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (P-2.2.1-1)$$



Slika P-2.2.1. Jedinična stepenasta (Hevisajdova) funkcija

Njen grafički prikaz je dat na slici P-2.2.1.

Nalaženje Laplasove transformacije ove funkcije primenom definicije (jednačina (2.2-1)) je vrlo jednostavno:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (0 - 1) = \frac{1}{s} \quad (P-2.2.1-2)$$

### 2.2.1.3. Najvažnije osobine Laplasove transformacije

Primena Laplasove transformacije na složene funkcije ili jednačine se znatno pojednostavljuje korišćenjem nekih važnih osobina i teorema koje za nju važe i koje navodimo u daljem tekstu.

#### 1. Linearnost

Najvažnija osobina Laplasove transformacije je da je linearna. To znači da je Laplasova transformacija linearne kombinacije funkcija jednaka linearnoj kombinaciji Laplasovih transformacija tih funkcija. Za linearnu kombinaciju dve funkcije, ova osobina se može izraziti na sledeći način:

a za linearnu kombinaciju  $n$  funkcija:

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{i=1}^n C_i f_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{L} \{ f_i(t) \} = \sum_{i=1}^n C_i F_i(s) \quad (2.2-3)$$

## 2. Transformacija izvoda

Kako se Laplasova transformacija koristi za rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina, jedna od vrlo važnih osobina je transformacija izvoda. Laplasova transformacija prvog izvoda funkcije  $f(t)$  se dobija na sledeći način:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0) \quad (2.2-4)$$

gde je  $F(s)$  Laplasova transformacija funkcije  $f(t)$ , a  $f(0)$  početni uslov za funkciju  $f(t)$ . Kao što se vidi, primenom Laplasove transformacije, diferenciranje se zamenjuje množenjem sa  $s$ .

Jednačina (2.2-4) se može generalizovati za  $n$ -ti izvod:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (2.2-5)$$

$f^{(i)}$  označava  $i$ -ti izvod po vremenu funkcije  $f(t)$ , izračunat za  $t=0$ .

## 3. Izvod transformacije

$$(-1)^n F^{(n)}(s) = \mathcal{L} \{ t^n f(t) \} \quad (2.2-6)$$

## 4. Transformacija integrala

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = \frac{1}{s} F(s) \quad (2.2-7)$$

## 5. Integral transformacije

$$\int_s^\infty F(s) ds = \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} \quad (2.2-8)$$

## 6. Teorema konačne vrednosti

Ako je  $F(s)$  Laplasova transformacija od  $f(t)$ , tada važi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)] \quad (2.2-9)$$

## 7. Teorema početne vrednosti

$$\lim_{t \rightarrow 0} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s)] \quad (2.2-10)$$

## 8. Translacija transformacije (teorema pomeranja)

$$\mathcal{L} \{ e^{\alpha t} f(t) \} = F(s - \alpha), \quad \alpha \in \text{Re} \quad (2.2-11)$$

## 9. Translacija funkcije (teorema kašnjenja)

$$\mathcal{L} \{ f(t - t_0) \} = e^{-st_0} F(s) \quad (2.2-12)$$

## 10. Transformacija periodične funkcije

Ako je funkcija  $f(t)$  periodična sa periodom  $T$ :

$$f(t+T) = f(t) \quad (2.2-13)$$

tada je:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (2.2-14)$$

Korišćenje Laplasove transformacije se obično svodi na korišćenje poznatih transformacija najčešće korišćenih funkcija, koje se mogu naći u tablicama Laplasovih transformacija. Najčešće korišćene funkcije u osnovnom kursu iz oblasti automatskog upravljanja procesima i njihove Laplasove transformacije, date su u tabeli 2.2-1. Šire i kompletnije tablice Laplasovih transformacija date su u Prilogu A.

TABELA 2.2-1. Laplasove transformacije najvažnijih funkcija

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$1/s$
$t$	$1/s^2$
$t^n \ (n=1,2,\dots)$	$n!/s^{n+1}$
$e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)$
$t^n e^{-\alpha t}$	$n!/(s+\alpha)^{n+1}$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\text{sh}(\omega t)$	$\omega/(s^2-\omega^2)$
$\text{ch}(\omega t)$	$s/(s^2-\omega^2)$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\omega/((s+\alpha)^2+\omega^2)$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$(s+\alpha)/((s+\alpha)^2+\omega^2)$

Funkcija  $\delta(t)$ , naziva se *jedinična impulsna funkcija* ili *Dirakova (Dirac) funkcija*, i definiše se na sledeći način:

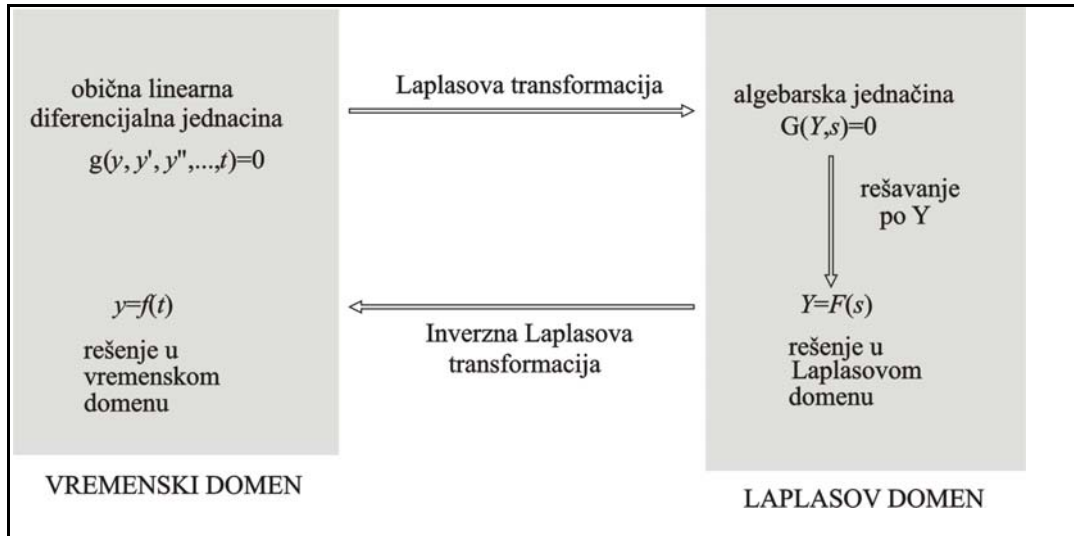
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.2-15)$$

Lako se može pokazati da Dirakova funkcija predstavlja prvi izvod Hevisajdove funkcije:

$$\delta(t) = u'(t) \quad (2.2-16)$$

#### 2.2.1.4. Rešavanje običnih linearnih diferencijalnih jednačina korišćenjem Laplasove transformacije; inverzna Laplasova transformacija

Postupak rešavanja običnih linearnih diferencijalnih jednačina pomoću Laplasovih transformacija bi se mogao šematski prikazati slikom 2.2-1.



Slika 2.2-1. Šematski prikaz rešavanja diferencijalnih jednačina korišćenjem Laplasove transformacije

Ključni i najteži korak pri rešavanju linearnih diferencijalnih jednačina korišćenjem Laplasove transformacije je nalaženje inverzne Laplasove transformacije. Inverzna Laplasova transformacija je takođe linearna i definiše se sledećim integralom:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (2.2-17)$$

Međutim, ova definicija se retko koristi za praktično nalaženje inverzne Laplasove transformacije. Najčešće se koristi metod Hevisajdove ekspanzije, koji se sastoji u sledećem. Funkcija  $F(s)$ , čiju inverznu Laplasovu transformaciju treba naći, se prikazuje u obliku zbira jednostavnih funkcija čije se inverzne transformacije mogu naći direktno, pregledom tablica Laplasovih transformacija:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_N(s) \quad (2.2-18)$$

Zatim se, zahvaljujući osobini linearnosti inverzne Laplasove transformacije, inverzna Laplasova transformacija polazne funkcije  $F(s)$  dobija kao zbir inverznih Laplasovih transformacija pojedinih sabiraka u jednačini (2.2-18):

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{F_N(s)\} \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_N(t) \end{aligned} \quad (2.2-19)$$

Pri rešavanju običnih linearnih diferencijalnih jednačina, funkcija  $F(s)$  čiju inverznu Laplasovu transformaciju treba naći, dobija se kao odnos dva polinoma po  $s$ :

$$F(s) = \frac{Z_M(s)}{P_N(s)} \quad (2.2-20)$$

Ako se izvrši faktorizacija polinoma u imeniocu:

$$F(s) = \frac{Z_M(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_N)} \quad (2.2-21)$$

gde su  $p_i (i=1, \dots, N)$  nule polinoma  $P_N(s)$ , i ako su sve ove vrednosti različite, funkcija  $F(s)$  se može izraziti kao zbir parcijalnih razlomaka od  $N$  članova:

$$F(s) = \frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2} + \dots + \frac{W}{s-p_N} \quad (2.2-22)$$

Nepoznate konstante  $A, B, \dots, W$ , se mogu odrediti na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{s \rightarrow p_1} [(s - p_1)F(s)] \\
 B &= \lim_{s \rightarrow p_2} [(s - p_2)F(s)] \\
 W &= \lim_{s \rightarrow p_N} [(s - p_N)F(s)]
 \end{aligned}
 \tag{2.2-23}$$

Ako se neka nula polinoma  $P_N$ , na primer  $p_1$ , ponavlja  $n$  puta:

$$F(s) = \frac{Z_M(s)}{(s - p_1)^n (s - p_2) \dots (s - p_N)} \tag{2.2-24}$$

funkcija  $F(s)$  se može razviti u zbir parcijalnih razlomaka na sledeći način:

$$F(s) = \frac{A_1}{(s - p_1)^n} + \frac{A_2}{(s - p_1)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \dots + \frac{W}{s - p_N} \tag{2.2-25}$$

Koeficijenti  $A_1, \dots, A_n$  se određuju na osnovu sledeće opšte formule:

$$A_m = \lim_{s \rightarrow p_1} \left[ \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} (s - p_1)^n F(s) \right] \frac{1}{(m-1)!} \tag{2.2-26}$$

Često se, kod jednostavnih funkcija, umesto korišćenja jednačina (2.2-23), odnosno (2.2-26), desna strana jednačine (2.2-22), odnosno (2.2-25) svodi na zajednički imenilac, a nepoznate konstante  $A, B, \dots, W$  se određuju izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene po  $s$  polinoma koji se dobija u brojiocu i polinoma  $Z_M(s)$ .

Postupak rešavanja običnih linearnih diferencijalnih jednačina pomoću Laplasovih transformacija ćemo ilustrovati na dva jednostavna primera.

**PRIMER 2.2-5.** Rešavanje obične linearne diferencijalne jednačine korišćenjem Laplasove transformacije

Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

za početne uslove:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.5$$

REŠENJE:

Najpre primenjujemo Laplasovu transformaciju na levu i desnu stranu date diferencijalne jednačine, koristeći pri tome osobinu linearnosti:

$$3 \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} \right\} + 5 \mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} + 2 \mathcal{L} \{x\} = \mathcal{L} \{0\}$$

Kada se nađu Laplasove transformacije pojedinih članova u gornjoj jednačini, uz korišćenje pravila o transformaciji izvoda, dobija se:

$$3 [s^2 X(s) - s x(0) - x'(0)] + 5 [s X(s) - x(0)] + 2 X(s) = 0$$

gde je:

$$X(s) = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

Zamenom početnih uslova u prethodnu jednačinu, dobija se:

$$(3s^2 + 5s + 2)X(s) = 1.5$$

Ovo je algebarska jednačina koja daje vezu između zavisno promenljive  $X(s)$  i Laplasove promenljive  $s$ . Njenim rešavanjem po  $X(s)$  se dobija:

$$X(s) = \frac{1.5}{3s^2 + 5s + 2}$$

što predstavlja rešenje polazne diferencijalne jednačine u Laplasovom domenu. Da bi se dobilo rešenje u vremenskom domenu treba naći inverznu Laplasovu transformaciju ovog izraza. U tom cilju treba prvo izvršiti faktorizaciju polinoma u imeniocu.

Nule polinoma u imeniocu su  $s_1 = -1$  i  $s_2 = -2/3$ , tako da se gornja jednačina može napisati u obliku:

$$X(s) = \frac{1.5}{3(s+1)(s+2/3)} = \frac{0.5}{(s+1)(s+2/3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2/3}$$

Prikažaćemo dva načina za određivanje konstanti  $A$  i  $B$ :

*I način:* korišćenjem jednačine (2.2-23):

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} \left[ (s+1) \frac{0.5}{(s+1)(s+2/3)} \right] = \frac{0.5}{-1+2/3} = -1.5$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2/3} \left[ (s+2/3) \frac{0.5}{(s+1)(s+2/3)} \right] = \frac{0.5}{-2/3+1} = 1.5$$

*II način:* Svođenjem zbira parcijalnih razlomaka na zajednički imenilac:

$$\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2/3} = \frac{A(s+2/3) + B(s+1)}{(s+1)(s+2/3)} = \frac{(A+B)s + (2/3A+B)}{(s+1)(s+2/3)}$$

Brojilac ovog izraza mora da bude identično jednak 0.5, što znači da mora da bude zadovoljen sledeći sistem jednačina:

$$A + B = 0$$

$$2/3A + B = 0.5$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobija se:

$$A = -1.5, \quad B = 1.5$$

Sada smo dobili rešenje jednačine u Laplasovom domenu  $X(s)$ , kao zbir dva parcijalna razlomka:

$$X(s) = \frac{1.5}{s+2/3} - \frac{1.5}{s+1}$$

za koje je jednostavno naći inverznu Laplasovu transformaciju, korišćenjem tabele 2.2-1:

$$x(t) = 1.5 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2/3} \right\} - 1.5 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = 1.5 e^{\frac{2}{3}t} - 1.5 e^{-t}$$

Rešenje polazne diferencijalne jednačine, za date početne uslove je:

$$x(t) = 1.5 \left( e^{\frac{2}{3}t} - e^{-t} \right)$$

**PRIMER 2.2-6.** Rešavanje obične linearne diferencijalne jednačine primenom Laplasove transformacije

Rešiti diferencijalnu jednačinu:

$$25 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 1$$

za početne uslove:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

REŠENJE:

Primenom Laplasove transformacije na levu i desnu stranu gornje jednačine:

$$25 \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} \right\} + \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{1\}$$

i zamenom početnih uslova, dobija se:

$$(25s^2 + 1) X(s) = \frac{1}{s}$$

Rešenje polazne diferencijalne jednačine u Laplasovom domenu je:

$$X(s) = \frac{1}{s(25s^2 + 1)} = \frac{1/25}{s(s^2 + 1/25)}$$

Opet ćemo prikazati dva načina nalaženja inverzne Laplasove transformacije ovog izraza.

*I način:* Izvršićemo potpunu faktorizaciju polinoma u imeniocu i prikazati  $X(s)$  u obliku zbira parcijalnih razlomaka:

$$X(s) = \frac{1/25}{s(s + 1/5j)(s - 1/5j)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1/5j} + \frac{C}{s - 1/5j}$$

Koeficijente  $A$ ,  $B$  i  $C$  ćemo odrediti korišćenjem jednačine (2.2-23):

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1/25}{s(s + 1/5j)(s - 1/5j)} \right] = \frac{1/25}{(1/5j)(-1/5j)} = \frac{1/25}{1/25} = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -1/5j} \left[ (s + 1/5j) \frac{1/25}{s(s + 1/5j)(s - 1/5j)} \right] = \frac{1/25}{(-1/5j)(-2/5j)} = \frac{1/25}{-2/25} = -\frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{s \rightarrow 1/5j} \left[ (s - 1/5j) \frac{1/25}{s(s + 1/5j)(s - 1/5j)} \right] = \frac{1/25}{(1/5j)(2/5j)} = \frac{1/25}{-2/25} = -\frac{1}{2}$$

Tako da se  $X(s)$  dobija kao sledeći zbir parcijalnih razlomaka:

$$y(t) = \mathcal{K} x(t)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije, dobija se:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1/5j} \right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - 1/5j} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{5}jt\right) - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{5}jt\right) \end{aligned}$$

Ovaj izraz se može pojednostaviti, jer zadnja dva člana mogu da se prikažu kao  $\cos(t/5)$ :

$$x(t) = 1 - \cos\frac{t}{5}$$

*II način:* Kada se u imeniocu javlja kvadratni član čiji su koreni kompleksni, uobičajeno je da se funkcija prikaže u obliku zbira parcijalnih razlomaka sledećeg oblika:



$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1/25}$$

Svođenjem ovog izraza na zajednički imenilac:

$$X(s) = \frac{A(s^2 + 1/25) + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 1/25)} = \frac{(A+B)s^2 + Cs + (1/25)A}{s(s^2 + 1/25)}$$

i na osnovu činjenice da brojilac ovako dobijenog izraza mora da bude identično jednak  $1/25$ , dobija se sledeći sistem od tri jednačine kojima su definisane vrednosti konstanti  $A$ ,  $B$  i  $C$ :

$$A + B = 0$$

$$C = 0$$

$$\frac{A}{25} = \frac{1}{25}$$

čijim se rešavanjem dobija:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0$$

Sada se  $X(s)$  može napisati u obliku:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1/25}$$

Rešenje polazne diferencijalne jednačine u vremenskom domenu može se dobiti traženjem inverzne Laplasove transformacije ovog izraza član po član, direktno na osnovu pregleda tablica Laplasovih transformacija (tabela 2.2-1):

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + (1/5)^2}\right\} = 1 - \cos\frac{1}{5}t$$

## 2.2.2. Dinamički model sistema u Laplasovom domenu - prenosna funkcija sistema

U poglavlju 2.1. smo pokazali da se posle linearizacije i prelaska na promenljive odstupanja, model sistema  $n$ -tog reda sa nagomilanim parametrima sa jednim ulazom i jednim izlazom može prikazati linearnom diferencijalnom jednačinom  $n$ -tog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (2.2-27)$$

Kada se na ovu jednačinu primeni Laplasova transformacija, dobija se algebarski izraz koji povezuje izlaznu i ulaznu promenljivu:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(s) \quad (2.2-28)$$

U ovoj jednačini  $X(s)$  predstavlja Laplasovu transformaciju odstupanja ulaza od njegove vrednosti u stacionarnom stanju, a  $Y(s)$  Laplasovu transformaciju odstupanja izlaza od njegove vrednosti u stacionarnom stanju. Pošto je jednačina (2.2-27) napisana preko promenljivih odstupanja, svi početni uslovi su jednaki nuli, zbog čega se u jednačini (2.2-28) ne javljaju vrednosti  $x$  i  $y$  i njihovih izvoda za  $t=0$ .

Odnos Laplasove transformacije promenljive odstupanja izlaza  $Y(s)$  i Laplasove transformacije promenljive odstupanja ulaza  $X(s)$ :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.2-29)$$

naziva se *prenosna funkcija sistema* i predstavlja jedan od najpogodnijih i najčešće korišćenih oblika dinamičkog modela sistema. Pri definisanju prenosne funkcije dolazi do izražaja prednost korišćenja

promenljivih odstupanja, jer, zahvaljujući ovakvom definisanju promenljivih, prenosna funkcija ne zavisi od početnih uslova, čime dobija na opštosti. Treba se podsetiti da je za sve realne sisteme  $m \neq n$ , odnosno da stepen polinoma u brojiocu ne može biti veći od stepena polinoma u imeniocu prenosne funkcije. Takođe treba zapaziti da se diferencijalna jednačina  $n$ -tog reda, posle primene Laplasove transformacije svodi na prenosnu funkciju čiji je imenilac polinom  $n$ -tog stepena. Na taj način se red sistema može odrediti direktno na osnovu prenosne funkcije sistema.

**VAŽNA NAPOMENA:** Kada se polinom u imeniocu prenosne funkcije izjednači sa nulom, dobija se algebarska jednačina koja je identična sa *karakterističnom jednačinom* polazne diferencijalne jednačine:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.2-30)$$

Ova jednačina se naziva *karakteristična jednačina sistema*.

Prenosna funkcija sistema sa nagomilanim parametrima se dobija u obliku algebarskog izraza koji zavisi od Laplasove promenljive  $s$ , i zbog toga je vrlo jednostavna i pogodna za korišćenje. Pošto se definiše kao odnos izlaza i ulaza, prenosna funkcija predstavlja dinamički model koji povezuje samo jedan izlaz iz sistema i samo jedan ulaz u sistem. Ona je vrlo pogodna za prikazivanje dinamike sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom. Međutim, za sisteme koji imaju više ulaza i više izlaza neophodno je definisati prenosne funkcije za svaku kombinaciju izlaza i ulaza koja je od interesa. U tom slučaju se često koriste matrice prenosnih funkcija.

Prenosna funkcija predstavlja dinamičku karakteristiku sistema i ne zavisi ni od početnih uslova, ni od oblika ulazne promene. Za definisanu ulaznu promenu  $x(t)$ , odziv sistema se dobija jednostavno, množenjem prenosne funkcije sistema sa Laplasovom transformacijom odstupanja ulaza od stacionarnog stanja, nalaženjem inverzne Laplasove transformacije i dodavanjem vrednosti izlaza u stacionarnom stanju:

$$y(t) = y_s + \mathcal{L}^{-1} \{G(s) X(s)\} \quad (2.2-31)$$

Ako se u izrazu kojim je definisana prenosna funkcija sistema kao odnos dva polinoma po  $s$  (jednačina (2.2-29)) izvrši faktorizacija polinoma u brojiocu i imeniocu, dobija se oblik koji je vrlo često u upotrebi:

$$G(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (2.2-32)$$

Vrednosti nula polinoma u brojiocu prenosne funkcije,  $z_1, \dots, z_m$ , nazivaju se *nule sistema*, dok se vrednosti nula polinoma u imeniocu prenosne funkcije,  $p_1, \dots, p_n$ , nazivaju *polovi sistema*. Pošto je za sve realne sisteme  $m \neq n$ , broj nula sistema nikada nije veći od broja polova sistema.

## 2.3. DINAMIKA JEDNOSTAVNIH - ELEMENTARNIH SISTEMA

Procesi koji se javljaju u postrojenjima procesne industrije su vrlo različiti i složeni. Međutim, veliki broj procesa, kao i drugih elemenata sistema upravljanja, može se tačno ili približno prikazati različitim kombinacijama nekoliko osnovnih, elementarnih prenosnih funkcija kojima se mogu opisati dinamičke karakteristike najjednostavnijih sistema. Ti osnovni, elementarni sistemi su:

1. proporcionalni element
2. sistem prvog reda (element sa vremenskom konstantom)
3. kapacitivni element (integrator)
4. sistem drugog reda
5. element sa mrtvim vremenom (čisto kašnjenje)
6. diferencijalni element.

### 2.3.1. Proporcionalni element

Kod proporcionalnog elementa, izlaz je proporcionalan ulazu u svakom trenutku vremena:

$$y(t) = K x(t) \quad (2.3-1)$$

što znači da je inercija sistema zanemarljiva.

Pošto je jednačina (2.3-1) algebarska, ona zadržava isti oblik posle primene Laplasove transformacije. Prenosna funkcija proporcionalnog elementa je konstanta:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = K \quad (2.3-2)$$

a njegova statička i dinamička karakteristika su identične.

U postrojenjima procesne industrije se vrlo retko javljaju procesi kojima odgovara ovakav matematički model. Međutim, neki delovi sistema se ponašaju kao proporcionalni elementi. Pored toga, elementi merno-regulacionog sistema se često konstruišu sa zahtevom da imaju ovakvu karakteristiku. Evo nekoliko karakterističnih primera proporcionalnog elementa.

### 2.3.1.1. Cevovod sa laminarnim strujanjem nestišljivog fluida

Jedna od poznatih relacija iz dinamike fluida je ona koja daje vezu između razlike pritisaka i protoka fluida kroz pravu horizontalnu cev konstantnog prečnika. Za slučaj laminarnog strujanja nestišljivog fluida, ova veza je linearna i naziva se Hagen-Poisejejev zakon:

$$F = \frac{D^4 \pi}{128 \mu L} \Delta p = K \Delta p \quad (2.3-3)$$

U ovoj jednačini izlazna promenljiva je protok  $F$ , dok je ulazna promenljiva razlika pritisaka koja izaziva strujanje  $\Delta p$ . Pojačanje sistema  $K$  zavisi od prečnika cevovoda  $D$ , viskoznosti fluida  $\mu$  i dužine cevovoda  $L$ .

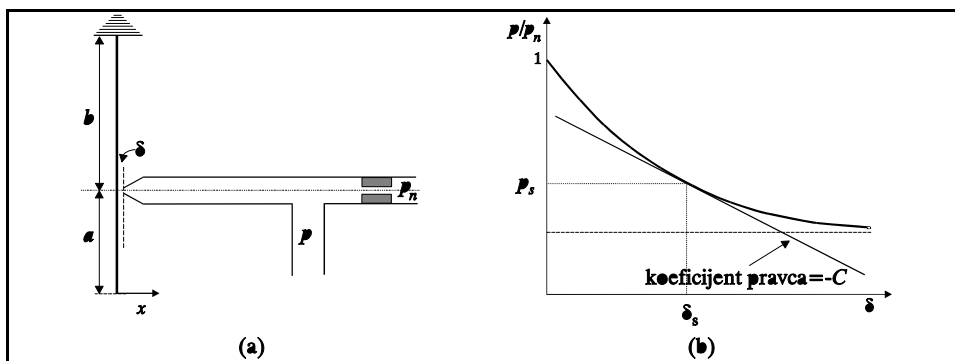
Treba primetiti da je Hagen-Poisejejev zakon prikazan jednačinom (2.3-3) potpuno analogan Omovom (Ohm) zakonu koji definiše vezu između jačine električne struje i napona:

$$i = \frac{I}{R} u \quad (2.3-4)$$

kojom se definiše električni otpornik kao proporcionalni element.

### 2.3.1.2. Pneumatski sistem pločica-mlaznica

Jedna od osnovnih komponenata svih pneumatskih uređaja je sistem pločica-mlaznica koji je šematski prikazan na slici 2.3-1(a).



Slika 2.3-1. Šematski prikaz pneumatskog sistema pločica-mlaznica (a) i zavisnost pritiska u mlaznici od udaljenosti od pločice (b)

U mlaznicu na kojoj postoji suženje (otpornost) i otvor malog prečnika dovodi se instrumentalni vazduh konstantnog pritiska  $p_n$  (1.4 bar). Blizu otvora mlaznice je normalno na pravac strujanja vazduha postavljena metalna pločica učvršćena na jednom kraju. Pomeranje drugog kraja pločice  $x$  izaziva

promenu rastojanja između otvora mlaznice i pločice  $\delta$ , što sa druge strane izaziva promenu povratnog pritiska u mlaznici  $p$  (kada je otvor mlaznice potpuno zatvoren ovaj pritisak je jednak  $p_n$ , dok se sa povećanjem rastojanja  $\delta$  pritisak u mlaznici smanjuje). Zavisnost povratnog pritiska u mlaznici  $p$  i rastojanja  $\delta$  je u principu nelinearna (kao što je prikazano na slici 2.3-1(b)), ali se u uskom opsegu rastojanja  $\delta$  koji je od praktičnog interesa, može aproksimirati linearnom vezom:

$$p = -C\delta \quad (2.3-5)$$

Rastojanje između pločice i mlaznice  $\delta$  se može izraziti na osnovu dužina  $b$  i  $a$  na slici 2.3-1(a) koje predstavljaju udaljenost učvršćenog i slobodnog kraja pločice od mlaznice i mehaničkog pomeranja slobodnog kraja mlaznice  $x$  koje predstavlja ulaznu promenljivu za posmatrani sistem:

$$\delta = \frac{b}{a+b} x \quad (2.3-6)$$

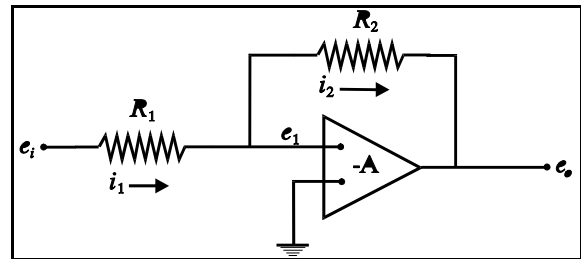
Kombinovanjem jednačina (2.3-5) i (2.3-6) dobija se direktna veza između pomeranja slobodnog kraja pločice  $x$  (ulaz) i povratnog pritiska u mlaznici  $p$  (izlaz):

$$p = -\frac{bC}{a+b} x = K x \quad (2.3-7)$$

Treba primetiti da se pojačanje sistema pločica-mlaznica  $K$  može jednostavno menjati promenom dužina  $a$  i  $b$ , odnosno promenom položaja mlaznice.

### 2.3.1.3. Operacioni pojačavač

Operacioni pojačavač, koji je šematski prikazan na slici 2.3-2., predstavlja jednu od osnovnih komponenta električnih elemenata merno-regulacione opreme. Sastoji se od naponskog pojačavača vrlo velikog pojačanja ( $A$ ) koji je povezan na red sa otpornikom  $R_1$  i paralelno sa otpornikom  $R_2$ .



Slika 2.3-2. Šema operacionog pojačavača

Matematički model ovog sistema se dobija jednostavno, definisanjem jačina struje kroz otpornike  $R_1$  i  $R_2$  ( $i_1$  i  $i_2$ , respektivno):

$$i_1 = \frac{e_i - e_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{e_1 - e_o}{R_2} \quad (2.3-8)$$

Kada je pojačanje naponskog pojačavača  $A$  vrlo veliko, nema proticanja električne struje kroz njega i važi:

$$i_1 = i_2, \quad e_1 \approx 0 \quad (2.3-9)$$

tako da se dobija:

$$\frac{e_i}{R_1} \approx -\frac{e_o}{R_2} \quad (2.3-10)$$

odnosno linearna algebarska veza između izlaznog napona  $e_o$  i ulaznog napona  $e_i$ :

$$e_o = -\frac{R_2}{R_1} e_i = K e_i \quad (2.3-11)$$

Jednačina (2.3-11) potvrđuje da je operacioni pojačavač proporcionalni element. Pojačanje operacionog pojačavača  $K$  se može jednostavno menjati promenom otpornosti otpornika  $R_1$  ili  $R_2$ .

**GENERALIZACIJA:** Izraz za zavisnost izlaznog i ulaznog napona kod operacionog pojačavača (jednačina (2.3-11)) se može uopštiti za slučaj kada se umesto otpornika  $R_1$  i/ili  $R_2$  nalazi bilo kakva kombinacija otpornika i kondenzatora, pri čemu umesto otpornosti treba koristiti odgovarajuće

impedanse. Najpogodnije je predstaviti impedanse u Laplasovom domenu, pri čemu je impedansa otpornika sa otpornošću  $R$ :  $I_R=R$ , kondenzatora sa kapacitivnošću  $C$ :  $I_C=1/Cs$ , dok se impedanse redne i paralelne veze dobijaju na identičan način kao za otpornike:

$$I_{redno} = I_1 I_2, \quad \frac{I}{I_{paralelno}} = \frac{I}{I_1} + \frac{I}{I_2} \quad (2.3-12)$$

Generalizovani oblik jednačine (2.3-11) bi se u Laplasovom domenu tako mogao prikazati sledećom jednačinom:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{I_2}{I_1} \quad (2.3-13)$$

### 2.3.2. Sistem prvog reda (element sa vremenskom konstantom)

Sistem prvog reda je sistem čiji se dinamički model može prikazati jednom diferencijalnom jednačinom prvog reda. Međutim, pod sistemom prvog reda se obično podrazumeva sistem koji se može opisati jednom običnom linearnom ili linearizovanom diferencijalnom jednačinom prvog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x \quad \text{—} \quad \tau \frac{dy}{dt} + y = K x \quad \left( \tau = \frac{a_1}{a_0}, K = \frac{b_0}{a_0} \right) \quad (2.3-14)$$

Primenom Laplasove transformacije, dobija se prenosna funkcija sistema prvog reda:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (2.3-15)$$

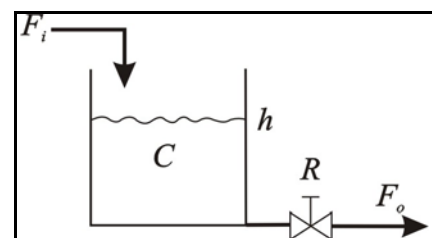
Sistem prvog reda je definisan sa dva parametra modela,  $\tau$  i  $K$ . Parametar  $\tau$  ima dimenzije vremena i naziva se *vremenska konstanta*, dok parametar  $K$  predstavlja *pojačanje*, odnosno statičku karakteristiku sistema prvog reda. Sistem prvog reda se često naziva i *element sa vremenskom konstantom*.

Sistemi koji se mogu prikazati ovakvim dinamičkim modelom se često javljaju u postrojenjima procesne industrije. Mnogi procesi (objekti upravljanja) se mogu tačno ili približno prikazati kao jedan, ili češće, kao kombinacija više redno vezanih sistema prvog reda. Takođe, mnogi merni i izvršni elementi se mogu smatrati sistemima prvog reda, kao i mnoge komponente pneumatskih i električnih elemenata merno-regulacione opreme. U daljem tekstu ćemo izvesti prenosne funkcije nekoliko karakterističnih primera sistema prvog reda.

#### 2.3.2.1. Protočni rezervoar sa tečnošću (nivo sistem prvog reda)

Posmatramo protočni rezervoar konstantne površine poprečnog preseka koji je šematski prikazan na slici 2.3-3., kroz koji protiče tečnost konstantne gustine i kod koga je celokupni otpor isticanju skoncentrisan u linearnom ventilu na izlaznom vodu. Materijalni bilans ovog sistema se može prikazati u obliku:

$$C \frac{dh(t)}{dt} = F_i(t) - F_o(t) \quad (2.3-16)$$



Slika 2.3-3. Nivo sistem kao primer sistema prvog reda

Na osnovu pretpostavke o linearnom ventilu u kome je skoncentrisan otpor isticanja dobija se linearna zavisnost između izlaznog protoka  $F_o$  i pogonske sile za isticanje, visine nivoa  $h$ :

$$F_o(t) = \frac{h(t)}{R} \quad (2.3-17)$$

U jednačinama (2.3-16) i (2.3-17) i na slici 2.3-3.,  $F_i$  je ulazni a  $F_o$  izlazni protok ( $m^3/s$ ),  $h$  (m) je visina nivoa,  $C$  ( $m^2$ ) površina poprečnog preseka suda, kojom je definisana njegova kapacitivnost, i  $R$  ( $s/m^2$ ) je

otpornost isticanja. Zamenom  $F_o$  iz jednačine (2.3-17) u jednačini (2.3-16) dobija se sledeća obična linearna diferencijalna jednačina prvog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$C \frac{dh(t)}{dt} = F_i(t) - \frac{h(t)}{R} \quad (2.3-18)$$

Pošto se u jednačini (2.3-18) ne javljaju konstantni članovi, pri prelasku na promenljive odstupanja, ova jednačina će ostati nepromenjena. Primenom Laplasove transformacije na jednačinu napisanu preko promenljivih odstupanja, posle množenja čitave jednačine sa  $R$ , dobija se:

$$RC sH(s) + H(s) = R F_i(s) \quad (2.3-19)$$

Ova jednačina povezuje Laplasovu transformaciju visine nivoa u sudu  $H(s)$ , koja predstavlja izlaz, sa Laplasovom transformacijom ulaznog protoka  $F_i(s)$ , koji predstavlja ulaznu promenljivu. Proizvod otpornosti isticanja i kapacitivnosti suda:

$$\tau = RC \quad (2.3-20)$$

koji ima dimenzije vremena, predstavlja *vremensku konstantu* nivo sistema prvog reda. Nalaženjem odnosa  $H(s)$  i  $F_i(s)$ , dobija se prenosna funkcija protočnog rezervoara:

$$\frac{H(s)}{F_i(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} \quad (2.3-21)$$

Za sistem prikazan na slici 2.3-3. se mogu definisati dve izlazne promenljive: pored visine  $h$ , to je i izlazni protok  $F_o$ . Prenosna funkcija koja definiše odnos izlaznog i ulaznog protoka se dobija na osnovu jednačine (2.3-17) koja povezuje visinu nivoa u sudu i izlazni protok. Pošto je ova jednačina algebarska, ona zadržava potpuno isti oblik i u Laplasovom domenu. Zamenom  $H(s)$  na osnovu jednačine (2.3-17) u prenosnoj funkciji definisanoj jednačinom (2.3-21), dobija se:

$$\frac{F_o(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2.3-22)$$

NAPOMENA: Linearna zavisnost između izlaznog protoka i visine nivoa, prikazana jednačinom (2.3-17), koja se često podrazumeva, važi samo u slučaju da je na izlaznom vodu ugrađen ventil sa linearnom protočnom karakteristikom i da je ukupni otpor isticanja skoncentrisan u ovom ventilu. U većini realnih slučajeva, veza između izlaznog protoka i visine koja predstavlja pogonsku silu za isticanje je oblika:

$$F_o = \beta \sqrt{h} \quad (2.3-23)$$

koji važi za turbulentno strujanje ( $\beta$  je hidraulička konstanta isticanja). Materijalni bilans za rezervoar se na taj način dobija u obliku jedne obične nelinearne diferencijalne jednačine prvog reda:

$$C \frac{dh}{dt} + \beta \sqrt{h} = F_i \quad (2.3-24)$$

Posle linearizacije i prevođenja na promenljive odstupanja, ova jednačina prelazi u oblik:

$$C \frac{dh}{dt} + \frac{\beta}{2\sqrt{h_s}} h = F_i \quad (2.3-25)$$

gde je  $h_s$  vrednost visine nivoa u stacionarnom stanju oko koga je vršena linearizacija. Posle primene Laplasove transformacije na jednačinu (2.3-25), dobija se prenosna funkcija koja odgovara sistemu prvog reda:

$$\frac{H(s)}{F_i(s)} = \frac{2\sqrt{h_s}/\beta}{(2C\sqrt{h_s}/\beta)s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (2.3-26)$$

Ovaj model je približan, s obzirom da je dobijen linearizacijom. Treba primetiti da pojačanje i vremenska konstanta sistema zavise od vrednosti  $h_s$ , odnosno od stacionarnog stanja oko koga je vršena linearizacija.

## 2.3.2.2. Termometar sa tečnošću

Kugla termometra sa tečnošću je šematski prikazana na slici 2.3-4. Ovaj termometar se dosta dobro može prikazati modelom sa nagomilanim parametrima koji podrazumeva da je ukupni otpor prenosu toplote skoncentrisan u filmu fluida oko termometra, dok je celokupni toplotni kapacitet skoncentrisan u masi termometarske tečnosti. Ako je  $T_f$  temperatura fluida koju treba izmeriti, a  $T_t$  temperatura termometarske tečnosti koja zapravo predstavlja temperaturu koju pokazuje termometar, toplotni bilans ovog sistema se može prikazati sledećom jednačinom:

$$m c_p \frac{dT_t}{dt} = h A (T_f - T_t) \quad (2.3-27)$$

gde je  $m$  masa termometarske tečnosti,  $c_p$  njena specifična toplotna kapacitivnost,  $A$  površina kugle termometra kroz koju se vrši prenos toplote između okolnog fluida i termometra i  $h$  koeficijent prenosa toplote između okolnog fluida i površine termometra. Ova jednačina povezuje temperaturu okolnog fluida  $T_f$  koja predstavlja ulaznu promenljivu i temperaturu koju pokazuje termometar  $T_t$  koja predstavlja izlaznu promenljivu iz sistema. Pri prelasku na promenljive odstupanja, ova jednačina zadržava identičan oblik. Kada se na ovu jednačinu primeni Laplasova transformacija i nađe odnos Laplasovih transformacija izlaza i ulaza, dobija se prenosna funkcija termometra sa tečnošću sledećeg oblika:

$$\frac{T_t(s)}{T_f(s)} = \frac{1}{\frac{m c_p s + 1}{hA}} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (2.3-28)$$

Veličina:

$$\tau = \frac{m c_p}{hA} \quad (2.3-29)$$

predstavlja proizvod toplotne kapacitivnosti termometra i otpornosti prenosu toplote, ima dimenzije vremena i predstavlja vremensku konstantu termometra.

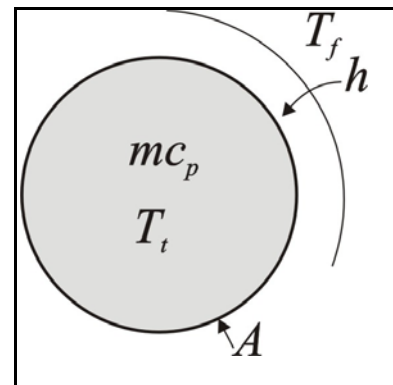
**NAPOMENA:** Treba primetiti da vremenska konstanta termometra zavisi od koeficijenta prenosa toplote, koji, kao što je poznato, zavisi od brzine strujanja okolnog fluida i od fizičkih parametara fluida. Zbog toga će vremenska konstanta istog termometra biti različita u različitim slučajevima (npr. vremenska konstanta termometra je za oko red veličine manja pri merenju temperature vode nego pri merenju temperature vazduha; vremenska konstanta termometra koji meri temperaturu fluida koji struji turbulentno je znatno manja u odnosu na merenje temperature istog fluida u stanju mirovanja i sl.). Treba takođe primetiti da parametri fluida (naročito viskoznost) zavise od temperature, tako da bi pri egzaktnoj analizi termometar morao da se posmatra kao nelinearan sistem. Međutim, u realnim slučajevima se termometri koriste za merenje temperature u relativno uskom opsegu, tako da je ovaj uticaj zanemarljiv.

Izvedeni dinamički model sistema prvog reda se može primeniti i na druge kontaktne termometre (npr. termoelement, termootporni i slično).

## 2.3.2.3. Proces mešanja

Ako posmatramo protočni sud sa mešanjem, konstantne zapremine  $V$ , u koji se uvodi tečna struja konstantnog protoka  $F$ , ali promenljivog sastava  $c_{Ai}(t)$  (slika 2.3-5.), tada se materijalni bilans po komponenti  $A$  može napisati u obliku:

$$V \frac{dc_A(t)}{dt} = F c_{Ai}(t) - F c_A(t) \quad (2.3-30)$$

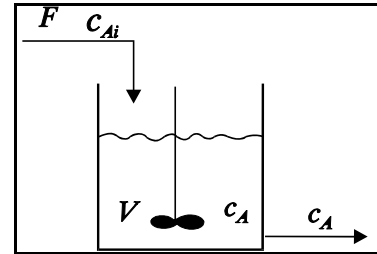


Slika 2.3-4. Termometar sa tečnošću kao sistem prvog reda

Ova jednačina daje vezu između sastava izlazne struje  $c_A$  (izlaz) i sastava napojne struje  $c_{Ai}$  (ulaz). Posle prelaska na promenljive odstupanja i primene Laplasove transformacije, dinamički model ovog sistema se može prikazati u obliku prenosne funkcije:

$$\frac{C_A(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{I}{\frac{V}{F}s + I} = \frac{I}{\tau s + I}, \quad \tau = \frac{V}{F} \quad (2.3-31)$$

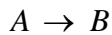
gde su  $C_A(s)$  i  $C_{Ai}(s)$  Laplasove transformacije promenljivih  $c_A(t)$  i  $c_{Ai}(t)$ . Vremenska konstanta ovog sistema  $\tau$  definisana je odnosom zapremine tečnosti u rezervoaru  $V$  i zapreminskog protoka  $F$ , i identična je sa kontaktnim vremenom rezervoara.



Slika 2.3-5. Proces mešanja kao sistem prvog reda

#### 2.3.2.4. Izotermni protlačni reaktor sa idealnim mešanjem

Ako se u sistemu prikazanom na slici 2.3-5. odigrava reakcija prvog reda:



sa konstantom brzine  $k$ , materijalni bilans po komponenti  $A$  se, za slučaj konstantne zapremine  $V$  i konstantnog protoka reakcione smeše  $F$ , dobija u sledećem obliku:

$$V \frac{dc_A(t)}{dt} = F c_{Ai}(t) - F c_A(t) - V k c_A(t) \quad (2.3-32)$$

Kada se, posle prelaska na promenljive odstupanja, na ovu jednačinu primeni Laplasova transformacija, dobija se sledeća algebarska jednačina:

$$(V s + F + k V) C_A(s) = F C_{Ai}(s) \quad (2.3-33)$$

iz koje se dobija prenosna funkcija reaktora:

$$\frac{C_A(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{F}{V s + F + k V} = \frac{\frac{F}{F + k V}}{\frac{V}{F + k V} s + 1} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (2.3-34)$$

Kao što se vidi, izotermni protlačni reaktor sa idealnim mešanjem, konstantnom zapreminom, konstantnim protokom reakcione smeše i reakcijom prvog reda je sistem prvog reda, čije pojačanje  $K$  i vremenska konstanta  $\tau$  zavise samo od konstante brzine reakcije  $k$  i kontaktnog vremena reaktora  $\tau_c = V/F$ :

$$K = \frac{F}{F + k V} = \frac{I}{I + k V/F} = \frac{I}{I + k \tau_c} \quad (2.3-35)$$

$$\tau = \frac{V}{F + k V} = \frac{V/F}{I + k V/F} = \frac{\tau_c}{I + k \tau_c}$$

#### 2.3.2.5. Elastični meh

Elastični meh, šematski prikazan na slici 2.3-6, je jedan od vrlo često korišćenih elemenata u sistemima upravljanja postrojenjima procesne industrije. Može se koristiti kao senzor u elementima za merenje pritiska ili kao jedna od komponenata pneumatskih elemenata (transmitera, regulatora i pretvarača signala). Izrađuje se najčešće od bakra, zbog njegove dobre toplotne provodnosti i dobrih elastičnih osobina. Pri promeni pritiska u ulaznom vodu  $p_i$  dolazi do promene pritiska u mehu  $p$  i do elastičnog istežanja (skupljanja) meha u pravcu  $x$  koordinate. Najčešće se može smatrati da je otpor strujanju gasa skoncentrisan u prigušnici ugrađenoj na ulaznom vodu (slika 2.3-6.), a kapacitet u zapremini meha  $V$  i da je širenje, odnosno skupljanje meha sporo, tako da je u svakom trenutku uspostavljena ravnoteža sila koje deluju na meh. U tom slučaju, elastični meh predstavlja sistem prvog reda.



Sile koje deluju na meh su sila pritiska, koja teži da izvrši deformaciju meha, i elastična sila, koja se toj deformaciji suprotstavlja. Ravnoteža ovih sila se može prikazati sledećom jednačinom:

$$pA = kx \quad (2.3-36)$$

gde je  $A$  površina poprečnog preseka meha,  $k$  konstanta elastičnosti meha i  $x$  dimenzija meha u  $x$ -pravcu.

Materijalni bilans za meh se može prikazati u obliku:

$$\frac{dm}{dt} = q_m \quad (2.3-37)$$

gde je  $m$  masa gasa u mehu, a  $q_m$  maseni protok gasa kroz ulazni vod. Ako je otpornost prigušnice  $R_L$  linearna,

$$q_m = \frac{p_i - p}{R_L} \quad (2.3-38)$$

ovaj protok se može prikazati kao:

dok se masa gasa u mehu, u slučaju da se može smatrati da se radi o idealnom gasu, može izraziti kao:

$$m = \frac{pV}{R_g T_g} \quad (2.3-39)$$

$V$  je zapremina meha,  $T_g$  temperatura gasa u mehu i  $R_g$  gasna konstanta. Kako je  $V=Ax$  i  $p=kx/A$  (iz jednačine (2.3-36)), jednačina materijalnog bilansa (2.3-37) se može prikazati u obliku:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{kx^2}{R_g T_g} \right) = \frac{1}{R_L} \left( p_i - \frac{kx}{A} \right) \quad (2.3-40)$$

Ovaj matematički model je izveden za slučaj sporih promena u sistemu, tako da se može podrazumevati da je sistem izoterman. Jednačina materijalnog bilansa (2.3-40) se može prikazati u sledećem obliku koji povezuje ulazni pritisak  $p_i$  (ulazna promenljiva) sa dužinom meha  $x$  (izlazna promenljiva):

$$2kx \frac{dx}{dt} = \frac{R_g T_g}{R_L} \left( p_i - \frac{kx}{A} \right) \quad (2.3-41)$$

Treba primetiti da je jednačina (2.3-41) nelinearna, jer na levoj strani sadrži proizvod izlazne promenljive  $x$  i njenog izvoda. Posle linearizacije i prevođenja na promenljive odstupanja, ova jednačina se može prikazati u obliku:

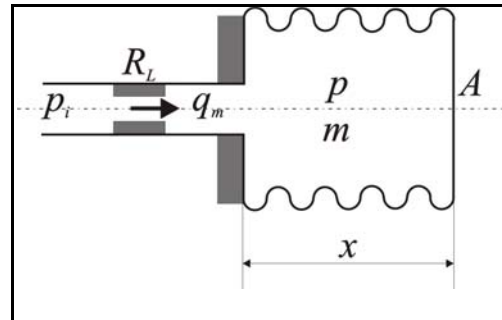
$$\frac{2R_L A x_s}{R_g T_g} \frac{dx}{dt} + x = \frac{A}{k} p_i \quad (2.3-42)$$

( $x_s$  je dužina meha u stacionarnom stanju oko koga je vršena linearizacija).

Primenom Laplasove transformacije, dobija se standardni oblik prenosne funkcije sistema prvog reda:

$$\frac{X(s)}{P_i(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad \tau = \frac{2R_L A x_s}{R_g T_g}, \quad K = \frac{A}{k} \quad (2.3-43)$$

kojom je definisan odnos Laplasove transformacije promene dimenzije meha u  $x$ -pravcu  $X(s)$  i Laplasove transformacije promene pritiska u ulaznom vodu  $P_i(s)$ .



Slika 2.3-6. Šematski prikaz elastičnog meha

### 2.3.2.6. RC-električno kolo

Tipičan primer sistema prvog reda koji se javlja u elektrotehnici je takozvano RC-kolo koje se dobija rednom ili paralelnom vezom jednog otpornika i jednog kondenzatora. Na slici 2.3-7. je data šema RC-kola sa rednom vezom kod koga je ulaz ukupni napon  $e_i$ , a izlaz pad napona na kondenzatoru  $e_o$ . Dinamički model ovog sistema se dobija postavljanjem nekoliko osnovnih jednačina:

- Jednačine kojom se definiše ukupan pad napona u sistemu:

$$e_i = v + e_o \quad (2.3-44)$$

U ovoj jednačini  $v$  je pad napona na otporniku  $R$  koji se može izraziti na osnovu Omovog zakona  $v= Ri$  ( $i$  je jačina struje koja protiče kroz kolo, a  $R$  električna otpornost).

- Jednačine kojom se definiše veza između pada napona i količine elektriciteta kod kondenzatora:

$$e_o = \frac{Q}{C} \quad (2.3-45)$$

( $Q$  je količina elektriciteta, a  $C$  električna kapacitivnost kondenzatora).

- Definicije jačine električne struje:

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (2.3-46)$$

Kombinovanjem ovih jednačina dobija se dinamički model RC-kola u obliku jedne obične linearne diferencijalne jednačine prvog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$RC \frac{de_o}{dt} + e_o = e_i \quad (2.3-47)$$

koja se, primenom Laplasove transformacije može prevesti u sledeću prenosnu finkciju:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad \tau = RC \quad (2.3-48)$$

( $E_i(s)$  i  $E_o(s)$  su Laplasove transformacije vremenskih funkcija  $e_i(t)$  i  $e_o(t)$ .)

Treba primetiti da i u ovom slučaju vremenska konstanta RC-kola kao sistema prvog reda predstavlja proizvod otpornosti i kapacitivnosti. Ovaj se zaključak može uopštiti na sve primere sistema prvog reda, pri čemu se način definisanja otpornosti i kapacitivnosti razlikuje u različitim sistemima u kojima se javljaju različiti fenomeni.

### 2.3.3. Kapacitivni element (integrator)

Prema definiciji da je sistem prvog reda onaj koji se može matematički opisati jednom običnom linearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda sa konstantnim koeficijentima, kapacitivni element bi takođe mogao da se svrsta u ovu grupu sistema. Međutim, ako je u jednačini (2.3-14) koeficijent uz  $y$ ,  $a_0=0$ , dobija se specijalan oblik diferencijalne jednačine prvog reda:

$$C \frac{dy}{dt} = x \quad (2.3-49)$$

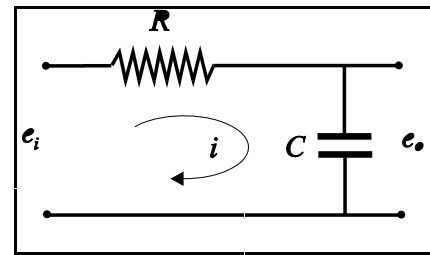
koji opisuje sistem koji predstavlja čist *integrator* čije je dinamičko ponašanje specifično. Zbog toga se ovaj sistem, koji se najčešće naziva *kapacitivni element*, posebno razmatra.

Primenom Laplasove transformacije, dobija se sledeći oblik prenosne funkcije kapacitivnog elementa:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Cs} \quad (2.3-50)$$

Parametar  $C$  naziva se *kapacitet* sistema. Prisustvo kapacitivnog elementa u sistemu izaziva pojavu *astatizma*, tako da se sistemi koji sadrže integrator često nazivaju *astatski sistemi*.

Tipičan primer kapacitivnog elementa je električni kondenzator. Njegov hidraulički analog je rezervoar za tečnost čiji ćemo dinamički model izvesti.



Slika 2.3-7. RC kolo

## 2.3.3.1. Rezervoar za skladištenje tečnosti

Na slici 2.3-8. je šematski prikazan rezervoar konstantne površine poprečnog preseka  $C$  u koji tečnost utiče sa protokom  $F$ . Ovaj sistem se može opisati jednačinom materijalnog bilansa:

$$F = \frac{dV}{dt} = C \frac{dh}{dt} \quad (2.3-51)$$

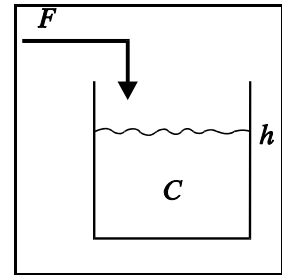
U ovom dinamičkom modelu, ulazni protok  $F$  predstavlja ulaznu, a zapremina u rezervoaru  $V$ , ili još češće visina nivoa tečnosti  $h$ , izlaznu promenljivu. Jednačina (2.3-51) je linearna i ne sadrži konstantne članove, tako da će njen oblik ostati potpuno isti prilikom prelaska na promenljive odstupanja. (Treba primetiti da će rezervoar biti u stacionarnom stanju samo ako je protok  $F$  jednak nuli, a visina nivoa  $h$  konstantna.) Primenom Laplasove transformacije na jednačinu (2.3-51) izraženu preko promenljivih odstupanja (za koju su svi početni uslovi jednaki nuli), dobija se:

$$F(s) = C s H(s) \quad (2.3-52)$$

gde su  $F(s)$  i  $H(s)$  Laplasove transformacije od  $F(t)$  i  $h(t)$ . Prenosna funkcija rezervoara se konačno dobija u obliku:

$$\frac{H(s)}{F(s)} = \frac{1}{Cs} \quad (2.3-53)$$

koji je identičan sa jednačinom (2.3-50). Treba primetiti da je kapacitet rezervoara određen njegovom površinom poprečnog preseka.



Slika 2.3-8. Rezervoar kao kapacitivni element

## 2.3.3.2. Operacioni pojačavač - integrator

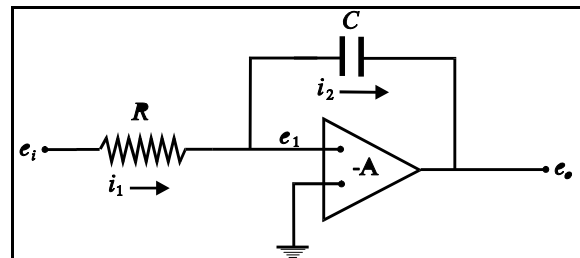
Pri projektovanju merno-regulacione opreme, naročito regulatora, često je neophodno da neke komponente ostvaruju integraciono dejstvo. Jedan od primera ovakvih komponenata je operacioni pojačavač - integrator koji se često javlja kao komponenta električnih sistema upravljanja. Ovaj element, čija je električna šema prikazana na slici 2.3-9., sastoji se od jednog naponskog pojačavača velikog pojačanja koji je vezan na red sa otpornikom otpornosti  $R$  i paralelno sa kondenzatorom kapacitivnosti  $C$ . Njegova prenosna funkcija se može najjednostavnije dobiti primenom jednačine (2.3-13). Impedanse ovog sistema su:

$$I_1 = R, \quad I_2 = \frac{1}{Cs} \quad (2.3-54)$$

tako da je ukupna prenosna funkcija:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{1}{RCs} \quad (2.3-55)$$

Kao što se vidi, dinamički kapacitet ovog elementa je proizvod električne otpornosti  $R$  i električne kapacitivnosti  $C$ .



Slika 2.3-9. Operacioni pojačavač - integrator

### 2.3.4. Sistem drugog reda

Pod sistemom drugog reda se podrazumeva sistem koji se može opisati sistemom od dve zavisne obične linearne diferencijalne jednačine prvog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1x \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2x\end{aligned}\quad (2.3-56)$$

ili jednom običnom linearnom diferencijalnom jednačinom drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bx \quad (2.3-57)$$

Ako se jednačina (2.3-57) podeli sa  $a_0$  dobija se standardni oblik diferencijalne jednačine koji se najčešće koristi za prikazivanje dinamike sistema drugog reda u vremenskom domenu:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy}{dt} + y = Kx \quad (2.3-58)$$

Posle primene Laplasove transformacije, dobija se standardni oblik prenosne funkcije sistema drugog reda:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} \quad (2.3-59)$$

Za definisanje sistema drugog reda se, pored pojačanja  $K$ , koriste još dva parametra: *vremenska konstanta*  $\tau$  i koeficijent prigušenja  $\xi$ . Često se umesto vremenske konstante  $\tau$  koristi njena recipročna vrednost  $\omega_n$  koja se naziva *prirodna (sopstvena) frekvencija sistema*.

Svaka kombinacija dva sistema prvog reda predstavlja sistem drugog reda. Sistemi u kojima se javljaju dva kuplovana efekta prvog reda (npr. dve paralelne ili konsektivne reakcije prvog reda, simultani prenos toplote i mase, neizotermna reakcija i slično), takođe predstavljaju sisteme drugog reda, kao i sistemi kod kojih se javljaju inercione sile, odnosno ubrzanja. Za razliku od kombinacije dva sistema prvog reda, sistemi drugog reda koji se ne mogu razložiti na elemente se često nazivaju *inherentni sistemi drugog reda*. Neki od ovih inherentnih sistema drugog reda pokazuju oscilatorno ponašanje, zbog čega se sistem drugog reda često naziva *oscilatorni element*.

U nastavku ćemo izvesti dinamičke modele za nekoliko primera sistema drugog reda.

#### 2.3.4.1. Dva nivo sistema prvog reda vezana na red bez međusobnog dejstva

Pod rednom vezom dva sistema bez međudejstva podrazumevamo takav složeni sistem od dva elementa kod koga izlaz iz prvog elementa predstavlja ulaz u drugi element, ali nema nikakvog povratnog dejstva drugog elementa na prvi. U tom slučaju je svaki element sistema nezavistan i njegov dinamički model se može definisati posebno.

Dva nivo sistema prvog reda vezana na red bez međusobnog dejstva, prikazana su šematski na slici 2.3-10. Pošto su ova dva nivo sistema potpuno nezavisna, prenosna funkcija svakog od njih se može dobiti posebno.

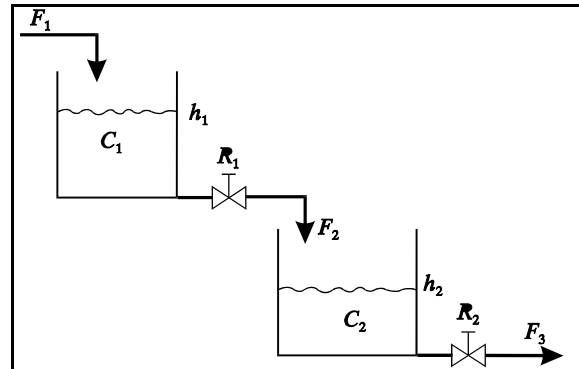
Svaki od ovih rezervoara je praktično identičan sistemu prikazanom na slici 2.3-3. (poglavlje 2.3.2.1.), tako da se prenosna funkcija svakog od njih može izraziti jednačinom (2.3-22). Pri tome treba voditi računa da je za prvi rezervoar ulazni protok  $F_1$ , a izlazni protok  $F_2$ , dok je za drugi rezervoar ulazni protok  $F_2$ , a izlazni protok  $F_3$ .

$$\frac{F_2(s)}{F_1(s)} = \frac{I}{\tau_1 s + I} \quad (2.3-60)$$

$$\frac{F_3(s)}{F_2(s)} = \frac{I}{\tau_2 s + I} \quad (2.3-61)$$

$\tau_1$  and  $\tau_2$  su vremenske konstante prvog i drugog rezervoara, respektivno:

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2 \quad (2.3-62)$$



Slika 2.3-10. Sistem drugog reda sastavljen od dva nivo sistema prvog reda vezana na red bez međudejstva

Ukupna prenosna funkcija koja se definiše kao odnos Laplasovih transformacija izlaznog protoka iz drugog  $F_3(s)$  i ulaznog protoka u prvi rezervoar  $F_1(s)$  se može jednostavno dobiti množenjem jednačina (2.3-60) i (2.3-61):

$$\frac{F_3(s)}{F_1(s)} = \frac{I}{(\tau_1 s + I)(\tau_2 s + I)} = \frac{I}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + I} \quad (2.3-63)$$

Ukoliko nas interesuje prenosna funkcija definisana odnosom Laplasovih transformacija visine nivoa u drugom sudu  $H_2(s)$  i ulaznog protoka  $F_1(s)$ , ona se može dobiti ako se iskoristi linearna zavisnost između visine nivoa i izlaznog protoka:

$$F_3(s) = \frac{H_2(s)}{R_2}$$

tako da je:

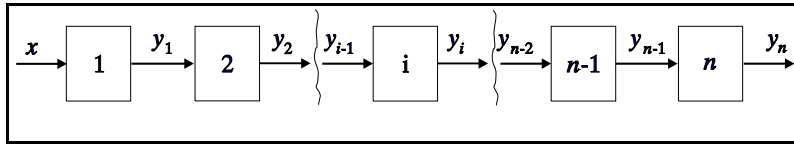
$$\frac{H_2(s)}{F_1(s)} = \frac{R_2}{(\tau_1 s + I)(\tau_2 s + I)} \quad (2.3-64)$$

Kao što se vidi, za rednu vezu dva sistema prvog reda bez međusobnog dejstva, ukupna prenosna funkcija se dobija jednostavnim množenjem pojedinačnih prenosnih funkcija. Poređenjem prenosne funkcije definisane jednačinom (2.3-63) sa standardnim izrazom za prenosnu funkciju drugog reda (jednačina (2.3-59)), dobijaju se izrazi za sopstvenu frekvenciju i koeficijent prigušenja redne veze dva sistema prvog reda bez međudejstva:

$$\left( \frac{1}{\omega_n^2} = \tau_1 \tau_2, \quad \frac{2\xi}{\omega_n} = \tau_1 + \tau_2 \right) \Rightarrow \left( \omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}, \quad \xi = \frac{(\tau_1 + \tau_2)/2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \right) \quad (2.3-65)$$

Pošto je aritmetička sredina dva broja nikad nije manja od geometrijske sredine, koeficijent prigušenja koji odgovara ovom sistemu nikad nije manji od jedan ( $\xi > 1$ ).

**GENERALIZACIJA:** Izvedeni zaključci o prenosnoj funkciji redne veze dva sistema prvog reda bez međudejstva se mogu generalizovati i na rednu vezu drugih sistema prvog reda, kao i na sisteme koji predstavljaju rednu vezu  $n$  sistema prvog reda. Ovakvi sistemi se vrlo često javljaju u postrojenjima procesne industrije (npr. kaskada izotermnih reaktora sa idealnim mešanjem u kojima se odigrava jednostavna reakcija prvog reda, uređaji za prenos mase sa stupnjevima sa istostrujnim tokom i sl.). Pored toga, kaskada sistema prvog reda se često koristi kao aproksimacija sistema sa raspoređenim parametrima. Šematski prikaz redne veze  $n$  sistema prvog reda bez međudejstva dat je na slici 2.3-11.



Slika 2.3-11. Šematski prikaz kaskade od n elemenata prvog reda

Ako je prenosna funkcija  $i$ -tog elementa u seriji:

$$\frac{Y_i(s)}{X_i(s)} = \frac{Y_i(s)}{Y_{i-1}(s)} = \frac{K_i}{\tau_i s + 1} \quad (2.3-66)$$

onda će prenosna funkcija koja definiše izlaz iz  $n$ -tog elementa u seriji i ulaza u prvi element biti:  
 Za slučaj kada su svi elementi u seriji identični (vremenske konstante i pojačanja svih sistema prvog reda

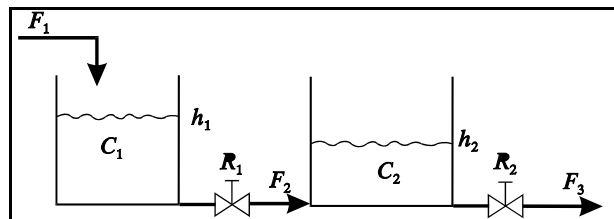
$$G_n(s) = \frac{Y_n(s)}{X(s)} = \frac{K_1 K_2 \dots K_n}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_n s + 1)} \quad (2.3-67)$$

u nizu jednake), prenosna funkcija ovog sistema ima oblik:

$$G_n(s) = \frac{Y_n(s)}{X(s)} = \frac{K^n}{(\tau s + 1)^n} \quad (2.3-68)$$

### 2.3.4.2. Redna veza dva nivo sistema prvog reda sa međusobnim dejstvom

Redna veza dva sistema sa međudejstvom se dobija u slučajevima kada postoji povratno dejstvo drugog sistema na prvi. Tipičan primer ovakvog sistema je redna veza dva nivo sistema prvog reda sa međusobnim dejstvom koja je prikazana na slici 2.3.12. U ovom slučaju rezervoari nisu međusobno nezavisni, jer izlazni protok iz prvog rezervoara zavisi ne samo od visine nivoa u prvom rezervoaru  $h_1$ , već i od visine nivoa u drugom rezervoaru  $h_2$ . Da bi došlo do prenosne funkcije ovog sistema treba postaviti materijalne bilanse za prvi i drugi rezervoar:



Slika 2.3-12. Sistem drugog reda sastavljen od dva nivo sistema prvog reda vezana na red sa međudejstvom

$$C_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = F_1(t) - F_2(t) \quad (2.3-69)$$

$$C_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = F_2(t) - F_3(t) \quad (2.3-70)$$

Da bi se potpuno definisao model, pored ove dve jednačine, treba definisati i protoke  $F_2$  i  $F_3$ , kao odnose odgovarajućih pogonskih sila i linearnih otpornosti isticanja:

$$F_2(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} \quad (2.3-71)$$

$$F_3(t) = \frac{h_2(t)}{R_2} \quad (2.3-72)$$

Zamenom jednačina (2.3-71) i (2.3-72) u jednačinama materijalnog bilansa (2.3-69) i (2.3-70) i primenom Laplasove transformacije (posle prelaska na promenljive odstupanja), dobija se sledeći sistem od dve algebarske jednačine:

$$C_1 s H_1(s) = F_1(s) - \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1} \quad (2.3-73)$$

$$C_2 s H_2(s) = \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1} - \frac{H_2(s)}{R_2} \quad (2.3-74)$$

Prenosna funkcija koja nas najčešće interesuje je ona koja povezuje Laplasove transformacije promene visine nivoa u drugom sudu  $H_2(s)$  i promene ulaznog protoka  $F_1(s)$ . Da bi se dobila ova prenosna funkcija, iz sistema jednačina (2.3-73)-(2.3-74) treba eliminisati promenljivu  $H_1(s)$ . Kao rezultat ovog postupka dobija se sledeća prenosna funkcija:

$$\frac{H_2(s)}{F_1(s)} = \frac{R_2}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + C_1 R_2) s + 1} \quad (2.3-75)$$

U ovoj prenosnoj funkciji  $\tau_1$  i  $\tau_2$  predstavljaju vremenske konstante rezervoara 1 i 2 kada bi egzistirali zasebno:

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2 \quad (2.3-76)$$

Prenosna funkcija koja daje vezu između izlaznog i ulaznog protoka dobija se u obliku:

$$\frac{F_3(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + C_1 R_2) s + 1} \quad (2.3-77)$$

Poređenjem jednačine (2.3-77) i jednačine (2.3-63) kojom je definisan sistem bez međudejstva, vidi se da se u imeniocu prenosne funkcije sistema sa međudejstvom javlja dodatni član  $C_1 R_2 s$  kojim je kvantifikovano međudejstvo.

### 2.3.4.3. Termometar sa zaštitnom oblogom

U industrijskim uslovima, termometri se najčešće ugrađuju sa zaštitnom oblogom. Na taj način, termometar koji bez zaštitne obloge predstavlja sistem prvog reda (poglavlje 2.3.2.2.), postaje sistem drugog reda. Šematski prikaz termometra sa zaštitnom oblogom na kome su prikazani svi toplotni otpori i kapaciteti i profil temperatura, dat je na slici 2.3-13. Dinamički model ovog sistema se dobija postavljanjem toplotnih bilansa za sam termometar:

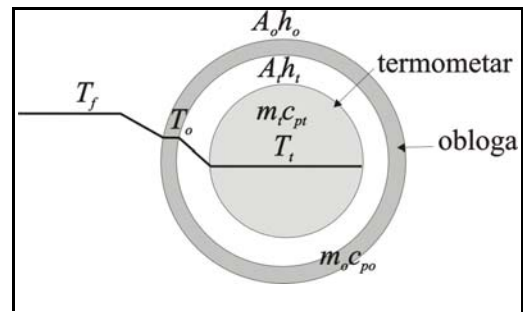
$$m_t c_{pt} \frac{dT_t}{dt} = A_t h_t (T_o - T_t) \quad (2.3-78)$$

i za oblogu:

$$m_o c_{po} \frac{dT_o}{dt} = A_o h_o (T_f - T_o) - A_t h_t (T_o - T_t) \quad (2.3-9)$$

U ovim jednačinama i na slici 2.3-13. su korišćene sledeće oznake:  $m_t c_{pt}$  - toplotna kapacitivnost termometra,  $m_o c_{po}$  - toplotna kapacitivnost obloge,  $h_t$  - koeficijent prenosa toplote između obloge i termometra,  $A_t$  - odgovarajuća površina za prenos toplote (površina termometra),  $h_o$  - koeficijent prelaza toplote između okolnog fluida i obloge,  $A_o$  - odgovarajuća površina za prenos toplote (spoljašnja površina obloge),  $T_f$  - temperatura fluida,  $T_t$  - temperatura termometra,  $T_o$  - temperatura obloge.

Može se primetiti da dinamički model termometra sa zaštitnom oblogom ima sličan oblik kao model redne veze dva nivo sistema prvog reda sa međudejstvom, odnosno da i ovaj sistem predstavlja rednu vezu dva sistema prvog reda sa međudejstvom. Posle primene Laplasove transformacije i eliminisanja temperature obloge  $T_o(s)$ , dobija se prenosna funkcija termometra sa zaštitnom oblogom kao odnos Laplasovih transformacija temperature koju pokazuje termometar  $T_t(s)$  i temperature okolnog fluida  $T_f(s)$ :



Slika 2.3-13. Šematski prikaz termometra sa zaštitnom oblogom

$$\frac{T_i(s)}{T_f(s)} = \frac{1}{\frac{m_i c_{pt}}{A_i h_i} \frac{m_o c_{po}}{A_o h_o} s^2 + \left( \frac{m_i c_{pt}}{A_i h_i} + \frac{m_o c_{po}}{A_o h_o} + \frac{m_i c_{pt}}{A_o h_o} \right) s + 1} \quad (2.3-80)$$

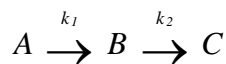
$$= \frac{1}{\tau_i \tau_o s^2 + (\tau_i + \tau_o + C_i R_o) s + 1}$$

Treba primetiti da je dobijena prenosna funkcija analogna sa onom u prethodnom primeru, s tim što se u ovom slučaju otpornosti, kapacitivnosti i vremenske konstante termometra i obloge definišu na odgovarajući način.

GENERALIZACIJA: U procesnoj industriji se često javljaju procesi koji predstavljaju rednu vezu više sistema prvog reda sa međudejstvom (na primer, kolone sa podovima sa suprotnostrujnim tokom, kaskade reaktora sa reciklom i slično). Međutim, generalizacija izvedene prenosne funkcije za sistem od dva elementa na sisteme od  $n$  elementata sa međudejstvom nije jednostavna kao u slučaju redne veze bez međudejstva. O ovim sistemima će biti više reči u poglavlju 2.5.1.4.

#### 2.3.4.4. Izotermni protočni reaktor sa idealnim mešanjem sa dve uzastopne reakcije prvog reda

Ako se izotermnom protočnom reaktoru sa idealnim mešanjem, konstantnom zapreminom i konstantnim protokom reakcione smeše, odigrava složena reakcija po mehanizmu:



dinamički model ovog sistema se može dobiti postavljanjem jednačina materijalnog bilansa za dve komponente (na primer, za reaktant A i željeni proizvod B). Za slučaj da se u napojnoj smeši nalazi samo reaktant A, dobijaju se sledeće jednačine:

$$V \frac{dc_A(t)}{dt} = F(c_{Ai}(t) - c_A(t)) - k_1 V c_A(t) \quad (2.3-81)$$

$$V \frac{dc_B(t)}{dt} = -F c_B(t) + k_1 V c_A(t) - k_2 V c_B(t) \quad (2.3-82)$$

Koncentracija treće komponente C se može odrediti iz materijalnog bilansa ukupne količine svih komponenata u sistemu:  $c_{uk} = c_A + c_B + c_C$ :

$$V \frac{dc_{uk}(t)}{dt} = F c_{Ai}(t) - F c_{uk}(t) \quad (2.3-83)$$

Posle prevođenja jednačina (2.3-81) i (2.3-82) na promenljive odstupanja i primene Laplasove transformacije, dobijaju se sledeće algebarske jednačine:

$$C_A(s) = \frac{1}{\frac{1+k_1\tau_c}{\tau_c} s + 1} C_{Ai}(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} C_{Ai}(s) \quad (2.3-84)$$

$$C_B(s) = \frac{\frac{k_1\tau_c}{1+k_2\tau_c}}{\frac{\tau_c}{1+k_2\tau_c} s + 1} C_A(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} C_A(s) \quad (2.3-85)$$

gde je sa  $\tau_c$  označeno kontaktno vreme reaktora, a sa  $\tau_1$  i  $\tau_2$  vremenske konstante koje su definisane analogno kao u jednačini (2.3-35):



$$\tau_1 = \frac{\tau_c}{I + k_1 \tau_c}, \quad \tau_2 = \frac{\tau_c}{I + k_2 \tau_c}$$

Kombinacijom jednačina (2.3-84) i (2.3-85) može se dobiti prenosna funkcija definisana kao odnos Laplasovih transformacija koncentracije željenog proizvoda  $B$ ,  $C_B(s)$ , i ulazne koncentracije reaktanta,  $C_A(s)$ :

$$\frac{C_B(s)}{C_A(s)} = \frac{\frac{k_1 \tau_c}{(I + k_1 \tau_c)(I + k_2 \tau_c)}}{\left(\frac{\tau_c}{I + k_1 \tau_c} s + I\right) \left(\frac{\tau_c}{I + k_2 \tau_c} s + I\right)} = \frac{K_1 K_2}{(\tau_1 s + I)(\tau_2 s + I)} \quad (2.3-86)$$

Kao što se može videti na osnovu diferencijalnih jednačina (2.3-81) i (2.3-82) ili prenosne funkcije definisane jednačinom (2.3-86), ovaj sistem drugog reda se matematički može interpretirati kao redna veza dva sistema prvog reda bez međudejstva. Takođe, na osnovu jednačina (2.3-84) i (2.3-86) se može videti da se posmatrani reaktor ponaša kao sistem prvog reda u odnosu na reaktant  $A$ , a kao sistem drugog reda u odnosu na proizvod  $B$ .

#### 2.3.4.5. U-manometar

Jedan od tipičnih inherentnih sistema drugog reda je U-manometar sa tečnošću, šematski prikazan na slici 2.3-14. Kod ovog sistema se javlja nestacionarno kretanje stuba manometarske tečnosti, tako da se njegov dinamički model dobija postavljanjem jednačine drugog Njutnovog zakona, odnosno bilansa sila koje deluju na stub manometarske tečnosti. Ovaj bilans se može napisati u obliku:

$$\left( \begin{array}{l} \text{SILA RAZLIKE PRITISAKA KOJI} \\ \text{DELUJU NA LEVI I DESNI KRAK} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{SILA ZBOG RAZLIKE} \\ \text{NIVOVA U OBA KRAKA} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{l} \text{SILA} \\ \text{TRENJA} \end{array} \right) \quad (2.3-87)$$

$$= \left( \begin{array}{l} \text{MASA TEČNOSTI} \\ \text{U CEVI} \end{array} \right) \times (\text{UBRZANJE})$$

Članovi u ovoj jednačini se mogu definisati na sledeći način:

- sila zbog razlike pritisaaka koji deluju na levi i desni krak manometra:

$$F_p = p_1 A - p_2 A = \Delta p A$$

( $\Delta p$  je razlika pritisaaka koja predstavlja ulaznu promenljivu koja deluje na manometar, a  $A$  površina poprečnog preseka U-cevi);

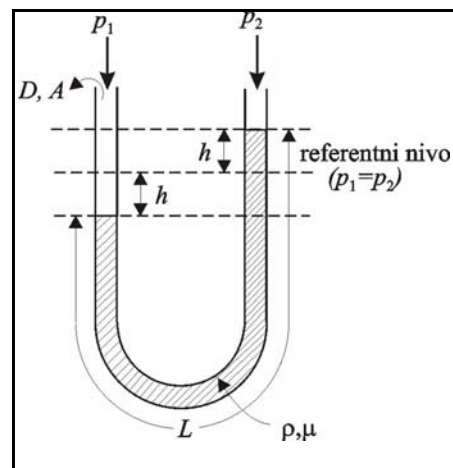
- sila zbog razlike nivoa u levom i desnom kraku U-manometra:

$$F_g = 2 h A \rho g$$

( $h$  je odstupanje nivoa manometarske tečnosti u kracima od referentnog nivoa,  $\rho$  gustina manometarske tečnosti, a  $g$  ubrzanje zemljine teže);

- sila trenja - proizvod pada pritiska zbog trenja i površine poprečnog preseka, koja se dobija primenom Hagen-Poazejevog zakona:

$$F_{tr} = \Delta p_{tr} A = \frac{32\mu L}{D^2} v A = \frac{32\mu L}{D^2} A \frac{dh}{dt}$$



Slika 2.3-14. U-manometar

( $v$  je srednja brzina tečnosti u cevi koja je jednaka prvom izvodu pređenog puta, odnosno visine  $h$ ,  $\Delta p_{tr}$  pad pritiska zbog viskoznog trenja,  $D$  prečnik manometarske cevi,  $L$  dužina stuba manometarske tečnosti i  $m$  viskoznost manometarske tečnosti);

- inerciona sila (proizvod mase tečnosti u cevi i ubrzanja):

$$m a = A L \rho \frac{d^2 h}{dt^2}$$

Zamenom ovih izraza u jednačinu (2.3-87) dobija se:

$$A L \rho \frac{d^2 h}{dt^2} = \Delta p A - 2h A \rho g - \frac{32L\mu}{D^2} A \frac{dh}{dt} \quad (2.3-88)$$

Ovo je obična linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, koja daje vezu između ulazne promene razlike pritiska sa leve i desne strane  $\Delta p$  i odstupanja visine manometarske tečnosti od referentnog nivoa  $h$ . Kada se ova jednačina podeli sa  $2A\rho g$ , može se napisati u obliku:

$$\frac{L}{2g} \frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{16\mu L}{\rho g D^2} \frac{dh}{dt} + h = \frac{1}{2\rho g} \Delta p \quad (2.3-89)$$

Poređenjem jednačine (2.3-89) sa standardnim oblikom jednačine sistema drugog reda (jednačina 2.3-56), koja u ovom slučaju ima oblik:

$$\tau^2 \frac{d^2 h}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dh}{dt} + h = K \Delta p \quad (2.3-90)$$

dobijaju se relacije kojima se definišu osnovni dinamički parametri U-manometra kao sistema drugog reda: vremenska konstanta  $\tau$  (sopstvena frekvencija  $\omega_n$ ), koeficijent prigušenja  $\xi$  i pojačanje  $K$ :

$$\tau^2 = \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{L}{2g}, \quad 2\xi\tau = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{16L\mu}{\rho g D^2}, \quad K = \frac{1}{2\rho g} \quad (2.3-91)$$

Na osnovu ovih relacija se vidi da sopstvena frekvencija U-manometra zavisi samo od geometrije U-manometra (dužine stuba manometarske tečnosti  $L$ ), dok koeficijent prigušenja ovog sistema zavisi kako od geometrijskih veličina ( $L$  i  $D$ ), tako i od fizičkih karakteristika manometarske tečnosti ( $\rho$  i  $m$ ).

Kada se, posle prelaska na promenljive odstupanja, na jednačinu (2.3-90) primeni Laplasova transformacija i nađe odnos izlaza ( $H(s)$ ) i ulaza ( $\Delta P(s)$ ), dobija se standardni oblik prenosne funkcije sistema drugog reda:

$$\frac{H(s)}{\Delta P(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1} \quad (2.3-92)$$

#### 2.3.4.6. Pneumatski regulacioni ventil

Regulacioni ventil je najčešće korišćen izvršni element u sistemima upravljanja u procesnoj industriji. O karakteristikama regulacionih ventila i njihovoj konstrukciji će biti više reči u trećem delu ove knjige, u poglavlju 3.3. U principu, svaki regulacioni ventil se sastoji od *motornog dela* (*servomotora*) i izvršnog dela. Statičke karakteristike ventila su uglavnom određene konstrukcijom njegovog izvršnog dela, dok su dinamičke karakteristike određene dinamičkim karakteristikama servomotora. U nastavku ćemo izvesti dinamički model pneumatskog servomotora koji ima značajnu primenu u postrojenjima procesne industrije.

Osnovni elementi pneumatskog servomotora (koji je šematski prikazan na slici 2.3-15.) su elastična membrana površine  $A$  na koju deluje ulazni upravljački signal - pritisak instrumentalnog vazduha  $p$ , i vratilo koje je čvrsto vezano sa membranom i oprugom, na čijem se kraju nalazi pečurka. Promena ulaznog pritiska  $p$  utiče na promenu položaja vratila ventila  $x$ , odnosno pečurke, čime se vrši promena protoka fluida kroz ventil. Dinamički model pneumatskog servomotora treba da da zavisnost između položaja vratila ventila  $x$  (izlazna promenljiva) i ulaznog pneumatskog signala  $p$  (ulazna promenljiva) i dobija se postavljanjem bilansa sila koje deluju na vratilo ventila:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = pA - kx - C \frac{dx}{dt} \quad (2.3-93)$$

U ovoj jednačini izraz na levoj strani definiše inercionu silu ( $m$  je masa vratila), prvi član na levoj strani predstavlja silu pritiska koja deluje na membranu, drugi član predstavlja elastičnu silu opruge ( $k$  je konstanta elastičnosti opruge), dok treći član predstavlja silu trenja ( $C$  je frikcionni koeficijent vratila). Deljenjem jednačine (2.3-93) sa  $k$  dobija se standardni oblik diferencijalne jednačine drugog reda:

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{C}{k} \frac{dx}{dt} + x = \frac{A}{k} p \quad (2.3-94)$$

na osnovu koga se mogu definisati vremenska konstanta, koeficijent prigušenja i pojačanje pneumatskog servomotora:

$$\tau^2 = \frac{m}{k}, \quad 2\xi\tau = \frac{C}{k}, \quad K = A/k \quad (2.3-95)$$

Primenom Laplasove transformacije dolazi se do standardnog oblika prenosne funkcije drugog reda koja je definisana kao odnos Laplasovih transformacija promene položaja vratila ventila  $X(s)$  i promene ulaznog signala pritiska  $P(s)$ :

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{\frac{A}{k}}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{C}{k}s + 1} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (2.3-96)$$

U većini realnih slučajeva je  $m \ll k$ , tako da se pneumatski servomotor praktično ponaša kao sistem prvog reda:

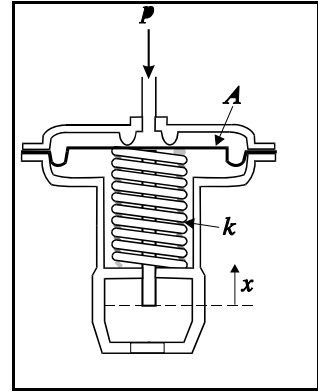
$$\frac{X(s)}{P(s)} \approx \frac{A/k}{(C/k)s + 1} \quad (2.3-97)$$

Drugi primeri inherentnih sistema drugog reda kod kojih se javlja ubrzanje su instrumenti sa skalom, merači nivoa koji rade na principu spojenih sudova, transmiteri diferencijalnog pritiska i slično. Ovakvi sistemi nisu karakteristični kao objekti upravljanja u procesnoj industriji. Dinamičke karakteristike drugog reda se kod procesa najčešće javljaju kao rezultat redne veze dva elementa prvog reda ili simultanog odigravanja dva fenomena, kao što je to prikazano u prva četiri primera.

### 2.3.5. Element sa mrtvim vremenom (element sa čistim kašnjenjem)

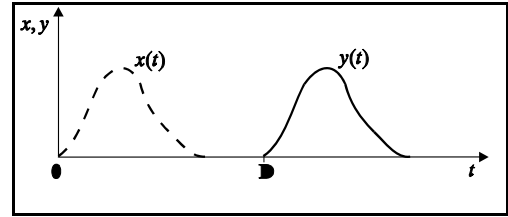
U procesnoj industriji se često javljaju procesi kod kojih se javlja kašnjenje izlazne za ulaznom promenljivom za određeno fiksno vreme. Ukoliko ne dolazi ni do kakve druge promene ulaznog signala, ovakav sistem se može vrlo jednostavno matematički interpretirati:

$$x(t) = f(t), \quad y(t) = f(t - D) = x(t - D) \quad (2.3-98)$$



Slika 2.3-15. Šematski prikaz pneumatskog servomotora

Na slici 2.3-16. su prikazane vremenske zavisnosti izlaza i ulaza koje odgovaraju ovakvom sistemu (za slučaj proizvoljne pulsne ulazne promene).



Slika 2.3-16. Efekat elementa sa mrtvim vremenom - kašnjenje funkcije

Primenom Laplasove transformacije, uz korišćenje teoreme kašnjenja, dobija se sledeća prenosna funkcija ovog sistema:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-Ds} \quad (2.3-99)$$

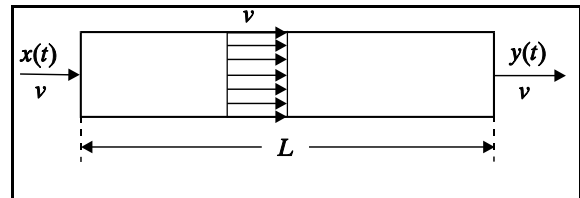
Veličina  $D$  koja definiše vreme za koje izlaz kasni za ulazom naziva se *mrtvo vreme* ili *čisto kašnjenje*, a element koji ima ovakve dinamičke karakteristike *element sa mrtvim vremenom* ili *element sa čistim kašnjenjem*.

Element sa mrtvim vremenom je zapravo sistem sa raspoređenim parametrima. Javlja se najčešće kod procesa sa klipnim ili približno klipnim strujanjem fluida, ali isto tako i pri prenosu signala. Tipični primeri procesa koji se mogu tačno ili približno prikazati kao kombinacija elementa sa mrtvim vremenom i sistema prvog, drugog ili višeg reda su cevni reaktori, razmenjivači toplote sa snopom cevi i omotačem, uređaji za prenos mase sa pakovanim slojem i slično. Njihovi dinamički modeli su po pravilu vrlo složeni i prikazuju se parcijalnim diferencijalnim jednačinama. U poglavlju 2.5.2. ćemo izvesti dinamičke modele za neke jednostavnije sisteme iz ove grupe. Kao što će biti pokazano u četvrtom i petom delu ove knjige, prisustvo mrtvog vremena znatno otežava upravljanje takvim procesom.

Kao ilustraciju elementa sa mrtvim vremenom, u ovom poglavlju ćemo prikazati najjednostavniji primer takvog sistema - cevovod sa klipnim strujanjem.

### 2.3.5.1. Cevovod sa klipnim strujanjem fluida

Tipičan primer sistema sa mrtvim vremenom je cevovod sa klipnim strujanjem fluida, odnosno sa ravnim profilom brzina koji se dobija pri razvijenom turbulentnom strujanju, šematski prikazan na slici 2.3-17. Ako je dužina cevovoda  $L$ , a brzina strujanja  $v$  i ako se na ulaz dovede proizvoljna promena koncentracije ili temperature, na izlazu će se dobiti promena potpuno istog oblika, ali tek posle vremena potrebnog da čestice fluida pređu rastojanje između ulaza i izlaza. Vreme za koje izlaz kasni za ulazom (mrtvo vreme cevovoda) se u ovom slučaju može jednostavno odrediti kao odnos dužine cevovoda i brzine fluida:



Slika 2.3-17. Cevovod sa klipnim strujanjem - primer elementa sa mrtvim vremenom

$$D = \frac{L}{v} \quad (2.3-100)$$

### 2.3.5.2. Padeova aproksimacija prenosne funkcije elementa sa mrtvim vremenom

Kao što je rečeno, element sa mrtvim vremenom predstavlja sistem sa raspoređenim parametrima. Njegova prenosna funkcija  $e^{-Ds}$  je periodična funkcija koja ima beskonačno mnogo polova i nula i ne može se prikazati u obliku odnosa dva polinoma po  $s$ , koji je vrlo pogodan za analizu sistema. Jedan od postupaka koji se koriste je *Padeova (PadŃ) aproksimacija* prenosne funkcije čistog kašnjenja odnosom dva polinoma po  $s$ , koja se zasniva na razvijanju eksponencijalne funkcije u Tejlorov red:

$$e^{-Ds} = \frac{e^{-Ds/2}}{e^{Ds/2}} = \frac{1 - (Ds/2) + 1/2(Ds/2)^2 - \dots}{1 + (Ds/2) + 1/2(Ds/2)^2 + \dots} \quad (2.3.101)$$

i aproksimaciji redova u brojiocu i imeniocu polinomima  $n$ -tog stepena (uzimanjem samo prvih  $n$  članova ovih redova). Padeova aproksimacija prvog reda tako ima oblik:

$$e^{-Ds} \approx \frac{1 - Ds/2}{1 + Ds/2} = -\frac{s - 2/D}{s + 2/D} \quad (2.3.102)$$

Tačnost Padeove aproksimacije mnogo zavisi od stepena polinoma u brojiocu i imeniocu aproksimativne prenosne funkcije. Poređenje tačnog modela elementa sa mrtvim vremenom i Padeove aproksimacije za različite vrednosti stepena polinoma prikazano je u Prilogu B.

### 2.3.6. Diferencijalni element

Diferencijalni element bi predstavljao takav sistem kod koga bi izlaz bio proporcionalan prvom izvodu ulaza, odnosno koji bi se mogao prikazati diferencijalnom jednačinom:

$$a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} \quad (2.3-103)$$

ili:

$$a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (2.3-104)$$

Prenosne funkcije koje odgovaraju ovim diferencijalnim jednačinama su:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \tau_d s \quad (\tau_d = b_1/a_0) \quad (2.3-105)$$

I

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = K(\tau_d s + 1) \quad (K = b_0/a_0, \tau_d = b_1/b_0) \quad (2.3-106)$$

Pri konstruisanju elemenata merno-regulacionih sistema često je poželjno ostvariti ovakvo dinamičko ponašanje. Međutim, kao što je prethodno naglašeno, ne postoje sistemi bez inercije koji bi vršili čisto diferenciranje, tako da nije moguće konstruisati element koji bi imao dinamičke karakteristike prikazane jednačinom (2.3-103) ili (2.3-104). Zbog toga se konstruišu elementi čija se dinamika može opisati sledećim diferencijalnim jednačinama prvog reda:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} \quad (2.3-107)$$

ili:

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (2.3-108)$$

odnosno sledećim prenosnim funkcijama:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\tau_d s}{\tau_1 s + 1} \quad (\tau_d = b_1/a_0, \tau_1 = a_1/a_0) \quad (2.3-109)$$

ili:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = K \frac{\tau_d s + 1}{\tau_1 s + 1} \quad (K = b_0/a_0, \tau_d = b_1/b_0, \tau_1 = a_1/a_0) \quad (2.3-110)$$

Ukoliko su koeficijenti ovih jednačina pravilno podešeni, ponašanje ovih sistema će biti približno ponašanju željenih diferencijalnih elemenata. Kao primer, navešćemo dva električna sistema koji ostvaruju približne karakteristike diferencijalnog elementa.

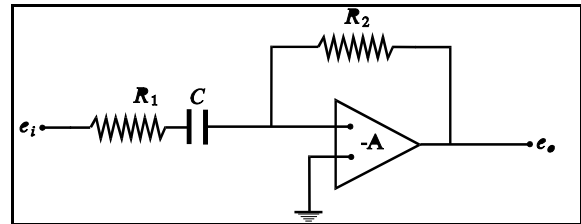
### 2.3.6.1. Operacioni pojačavač - diferencijator

Na slici 2.3-18. je data električna šema elementa kome odgovara dinamički model prikazan diferencijalnom jednačinom (2.3-107), odnosno prenosnom funkcijom (2.3-109) i koji se naziva operacioni pojačavač - diferencijator. Dinamički model ovog električnog kola se može najjednostavnije dobiti primenom jednačine (2.3-13). Lako se može pokazati da su impedanse  $I_1$  i  $I_2$  za ovaj sistem:

$$I_1 = R_1 + \frac{I}{Cs}, \quad I_2 = R_2 \quad (2.3-111)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{R_2 C s}{R_1 C s + I} \quad (2.3-112)$$

Ako je  $R_1 C \ll 1$ , ovaj sistem će se približno ponašati kao čist diferencijator.



Slika 2.3-18. Operacioni pojačavač - diferencijator

### 2.3.6.2. Operacioni pojačavač - diferencijalni element

Na slici 2.3-19. je prikazana električna šema jednog sistema čije se dinamičke karakteristike mogu opisati diferencijalnom jednačinom (2.3-108), odnosno prenosnom funkcijom (2.3-110). I u ovom slučaju se prenosna funkcija može dobiti primenom jednačine (2.3-13). Impedanse  $I_1$  i  $I_2$  su:

$$I_1 = \left( \frac{I}{R_1} + Cs \right)^{-1} + R_2 = \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s}{I + R_1 C s}, \quad I_2 = R_3 \quad (2.3-113)$$

tako da je prenosna funkcija:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = - \frac{I_2}{I_1} = - \frac{R_3 (R_1 C s + I)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = - \frac{R_3}{R_1 + R_2} \frac{R_1 C s + I}{\frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} s + I} \quad (2.3-114)$$

Kada je  $R_1 R_2 C / (R_1 + R_2) \ll 1$ , ovaj sistem se približno ponaša kao čist diferencijalni element. Sistem sa ovakvim dinamičkim karakteristikama se često naziva *diferencijalni kompenzator*.

U postrojenjima procesne industrije se ne javljaju procesi koji bi imali približne karakteristike diferencijalnog elementa. Međutim, kod mnogih procesa prvog, drugog i višeg reda se javlja i diferenciranje ulaza, tako da se mogu prikazati prenosnim funkcijama koje predstavljaju proizvod prenosnih funkcija diferencijalnog elementa i elementarnih sistema prvog, drugog ili višeg reda.

## 2.4. BLOK DIJAGRAMI I ALGEBRA BLOK DIJAGRAMA

Dinamički modeli složenih sistema, uključujući i sisteme automatskog upravljanja, se vrlo često prikazuju grafički. Jedan od najčešće korišćenih načina grafičkog prikazivanja dinamike sistema su *blok dijagrami*.


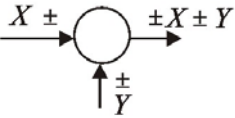
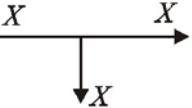
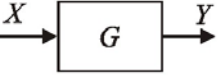
Blok dijagram predstavlja grafički ekvivalent dinamičkog matematičkog modela sistema. U njemu su

promenljive prikazane tokovima signala, a pojedini elementi sistema blokovima u koje su upisani odgovarajući dinamički modeli.

### 2.4.1. Osnovni elementi blok dijagrama

Osnovni grafički elementi od kojih su sastavljeni blok dijagrami linearnih sistema dati su u tabeli 2.4-1. Tokovi signala predstavljaju ulazne i izlazne promenljive u sistemu, dok su blokovima predstavljeni pojedini delovi sistema i njihovi dinamički modeli. Pri tome se dinamički model upisuje unutar bloka kojim je prikazan dati element sistema. Po pravilu se ovi dinamički modeli prikazuju u Laplasovom domenu, u obliku prenosnih funkcija koje povezuju ulaznu promenljivu prikazanu ulaznim signalom i izlaznu promenljivu prikazanu izlaznim signalom. Izlazni signal iz bloka se dobija kao proizvod prenosne funkcije upisane u blok i ulaznog signala.

TABELA 2.4-1. Osnovni elementi blok dijagrama

NAZIV	OZNAKA
Tok signala	
Sabiranje, odnosno oduzimanje signala	
Grananje signala	
Blok	

Rad sa blok dijagramima je vrlo jednostavan. Algebra blok dijagrama je vrlo slična običnoj algebri, tako da se sa blokovima može raditi kao sa opštim brojevima.

Za rad sa blok dijagramima važe sledeća osnovna pravila:

1. u jedan blok može da uđe samo jedan signal i da iz njega izađe samo jedan signal
2. u jedan krug mogu da uđu samo dva signala, a da iz njega izađe samo jedan signal
3. mogu se sabirati, odnosno oduzimati, samo signali iste vrste, odnosno signali koji predstavljaju istu fizičku veličinu (temperatura se sabira sa temperaturom, protok sa protokom, pritisak sa pritiskom itd.)
4. signal ne menja vrednost prilikom grananja.

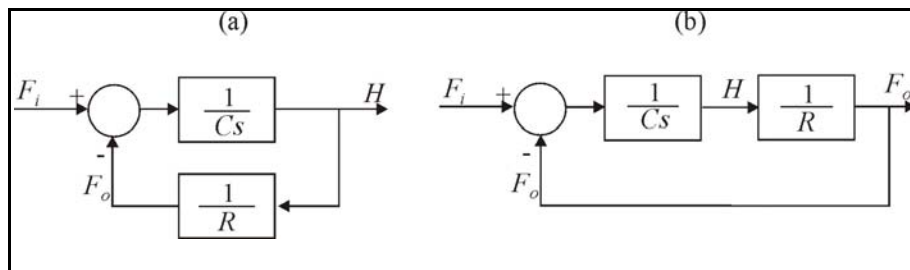
### 2.4.2. Formiranje blok dijagrama

Blok dijagram se može formirati direktno na osnovu diferencijalne jednačine koja opisuje sistem. Pošto oni najčešće predstavljaju ekvivalent dinamičkog modela u Laplasovom domenu, i na blok dijagrame se može primeniti osobina linearnosti, kao i činjenica da  $n$ -tom izvodu funkcije po vremenu odgovara prenosna funkcija koja sadrži  $s^n$ . Kao ilustraciju, prikazaćemo formiranje blok dijagrama koji odgovara običnoj linearnoj diferencijalnoj jednačini drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Blok dijagram sistema se može formirati i direktno, na osnovu analize sistema i sagledavanja njegovih najjednostavnijih delova i njihovih međusobnih odnosa. Kao ilustraciju ćemo prikazati formiranje blok dijagrama jednog nivo sistema prvog reda i redne veze dva nivo sistema prvog reda sa međudejsvom.

## PRIMER 2.4-2. Blok dijagram nivo sistema prvog reda

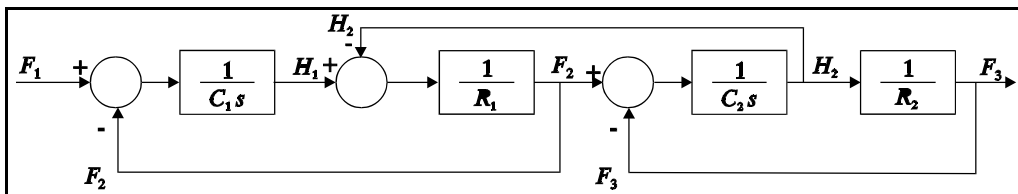
Ako analiziramo nivo sistem prvog reda, prikazan na slici 2.3-3. (čiju smo prenosnu funkciju izveli u poglavlju 2.3.2.1.), možemo sagledati da se on sastoji od jednog rezervoara i jednog linearnog ventila. Rezervoar možemo posmatrati kao kapacitivni element, čija je prenosna funkcija  $1/Cs$ , u koji ulazi neto protok ( $F_i - F_o$ ). Izlazna promenljiva je visina nivoa u sudu  $H$ . Protok  $F_i$  je nezavisan ulaz u sistem, dok protok  $F_o$  predstavlja izlaz koji zavisi od visine  $H$ , preko proporcionalnog elementa  $1/R$  koji je definisan otpornošću linearnog ventila  $R$ . Na slici P-2.4-2. su prikazane dve varijante blok dijagrama ovog sistema koje su dobijene na osnovu ove analize. U varijanti (a) se kao izlaz posmatra visina nivoa u sudu  $H$ , a u varijanti (b) izlazni protok  $F_o$ . Kao što se vidi, ovaj blok dijagram se dobija u obliku zatvorene konture sa negativnom povratnom spregom. Ovaj sistem na neki način sam vrši regulaciju, jer se pri povećanju ulaznog protoka povećava i izlazni protok, kao rezultat povećanja visine. Posle nekog vremena sistem dolazi u novo stacionarno stanje pri kome su ulazni i izlazni protok jednaki i visina u sudu konstantna.



Slika P-2.4.2. Blok dijagram nivo sistema prvog reda (a) varijanta u kojoj je izlaz visina nivoa u sudu; (b) varijanta u kojoj je izlaz izlazni protok

## PRIMER 2.4-3. Blok dijagram redne veze dva nivo sistema prvog reda sa međudejstvom

Blok dijagram redne veze dva nivo sistema prvog reda bez međudejstva se dobija jednostavno, spajanjem dva blok dijagrama sistema prvog reda prikazana slikom P-2.4-2(b). Međutim, kod redne veze dva sistema prvog reda sa međudejstvom, koja je opisana u poglavlju 2.3.4.2., situacija je nešto složenija, jer protok isticanja iz prvog rezervoara u drugi  $F_2$  zavisi od visina nivoa u oba suda, odnosno od njihove razlike ( $H_1 - H_2$ ). Zbog toga, blok dijagram treba da prikaže i ovo povratno dejstvo. Detaljan blok dijagram ovog sistema dat je na slici P-2.4-3.



Slika 2.4.3. Blok dijagram redne veze dva nivo sistem prvog reda sa međudejstvom

## 2.4.3. Rešavanje blok dijagrama - ekvivalentne transformacije

Često je potrebno pojednostaviti složeni blok dijagram nekog sistema, da bi se lakše izvukli zaključci o dinamičkom ponašanju ukupnog sistema. U tom cilju se vrši postupna transformacija blok dijagrama u sve jednostavnije ekvivalentne blok dijagrame, sve do najjednostavnijeg oblika iz koga se jasno može sagledati ukupna prenosna funkcija sistema. Za dva blok dijagrama kažemo da su *ekvivalentni* ukoliko im odgovaraju iste ukupne prenosne funkcije. U tabeli 2.4-2. su prikazane osnovne transformacije pomoću kojih se blok dijagram može prevesti iz jednog u drugi ekvivalentni oblik.

Većinu pravila prikazanih u tabeli 2.4-2. nije potrebno posebno dokazivati, jer su manje-više očigledna. Daćemo ukratko dokaze samo za pravila 10. i 12. Pri tome ćemo koristiti činjenicu da se na rad sa



signalima i blokovima, odnosno prenosnim funkcijama koje prikazuju, mogu primeniti sva pravila obične algebre.

Tabela 2.4-2. Osnovne ekvivalentne transformacije blok dijagrama

Naziv transformacije	Polazni blok dijagram	Ekvivalentni blok dijagram
1. Zamena mesta blokova		
2. Zamena mesta tačaka sabiranja		
3. Premeštanje tačke sabiranja ispred bloka		
4. Premeštanje tačke sabiranja iza bloka		
5. Premeštanje tačke grananja ispred bloka		
6. Premeštanje tačke grananja iza bloka		
7. Premeštanje tačke grananja ispred tačke sabiranja		

Tabela 2.4-2. Osnovne ekvivalentne transformacije blok dijagrama ( nastavak)

Naziv transformacije	Polazni blok dijagram	Ekvivalentni blok dijagram
8. Premeštanje tačke grananja iza tačke sabiranja		
9. Svođenje redne veze (kaskade) dva elementa		
10. Svođenje upravne sprege (paralelne veze)		
11. Svođenje pozitivne povratne sprege		
12. Svođenje negativne povratne sprege		

Dokaz pravila 10. iz tabele 2.4-2. o svođenju upravne sprege (paralelne veze). Pri dokazivanju ovog pravila ćemo, zbog jednostavnosti, razmotriti samo slučaj kod koga oba signala u krug ulaze sa znakom +. Svi ostali slučajevi se mogu dokazati na analogan način.

U cilju dokazivanja ovog pravila uvešćemo dodatne oznake nekih signala u polaznom blok dijagramu (slika 2.4-1.):

$$a = G_1 X$$

$$b = G_2 X$$

Pošto je izlaz jednak zbiru ova dva signala:

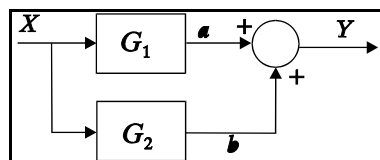
$$Y = a + b = G_1 X + G_2 X = (G_1 + G_2)X$$

ukupna prenosna funkcija se dobija u obliku:

$$\frac{Y}{X} = G_1 + G_2 \quad (2.4-1)$$

što odgovara rezultatu prikazanom u tabeli 2.4-2.

Dokaz pravila 12. o svođenju blok dijagrama negativne povratne sprege. Pri dokazu ovog pravila ćemo opet uvesti neke dodatne oznake signala u polaznom blok dijagramu kojim je definisana negativna povratna sprega (slika 2.4-2.):



slika 2.4-1. Blok dijagram paralelne veze

$$a = G_2 Y$$

$$b = X - a$$

zlazni signal  $Y$  se sada može izraziti kao:

$$Y = G_1 b = G_1(X - a) = G_1(X - G_2 Y) = G_1 X - G_1 G_2 Y$$

Na osnovu prvog i poslednjeg člana ove višestruke jednačine, može se dobiti:

$$Y + G_1 G_2 Y = G_1 X$$

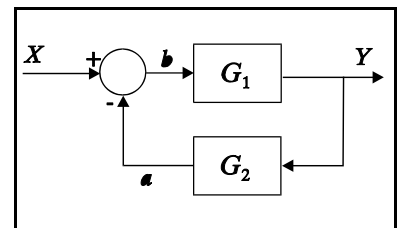
tako da se ukupna prenosna funkcija koja odgovara ovom blok dijagramu dobija u obliku:

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} \quad (3.4-2)$$

što odgovara rezultatu prikazanom u tabeli 2.4-2.

Deo blok dijagrama negativne povratne sprege u kome se nalazi blok  $G_1$  naziva se *direktna grana*, dok se deo u kome se nalazi blok  $G_2$  naziva *povratna grana*. U principu se i u direktnoj i u povratnoj grani može nalaziti više redno vezanih blokova.

Dokaz pravila 11. o eliminaciji pozitivne povratne sprege dobija se potpuno analognim postupkom.



Slika 2.4-2. Blok dijagram negativne povratne sprege

Ekvivalentne transformacije prikazane u tabeli 2.4-2. omogućavaju postupno transformisanje složenih blok dijagrama u sve jednostavnije ekvivalentne dijagrame, da bi se konačno, za najjednostavniji slučaj sa jednim ulazom i jednim izlazom, dobio blok dijagram koji je predstavljen samo jednim blokom u kome je upisana ukupna prenosna funkcija sistema. Ovaj postupak se naziva *rešavanje blok dijagrama*. U daljem tekstu ćemo dati nekoliko primera rešavanja blok dijagrama.

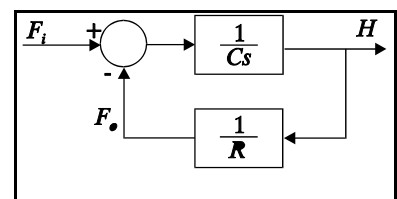
#### PRIMER 2.4-4. Rešavanje blok dijagrama sistema prvog reda

Blok dijagram nivo sistema prvog reda, dobijen u primeru 2.4-2. transformisati u najjednostavniji ekvivalentni oblik.

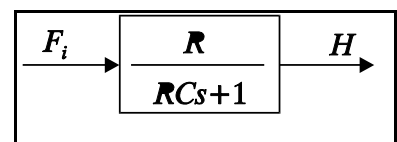
Zbog jednostavnosti ćemo odabrati samo jednu varijantu blok dijagrama dobijenog u primeru 2.4-2., na primer, varijantu (a). Ovaj blok dijagram je predstavljen na slici P-2.4.4-1. i njegovo rešavanje je vrlo jednostavno. Blok dijagram ovog sistema predstavlja jednostavnu negativnu povratnu spregu, tako da se može rešiti direktnom primenom pravila 12. Na osnovu ovog pravila će ukupna prenosna funkcija nivo sistema prvog reda biti:

$$\frac{H(s)}{F_i(s)} = \frac{\frac{1}{CS}}{1 + \frac{1}{CS} \frac{1}{R}} = \frac{R}{RCs + 1} \quad (P-2.4.4-1)$$

tako da se sistem prvog reda može prikazati ekvivalentnim blok dijagramom prikazanim na slici P-2.4.4-2.



Slika P-2.4.4-1. Blok dijagram nivo sistema prvog reda

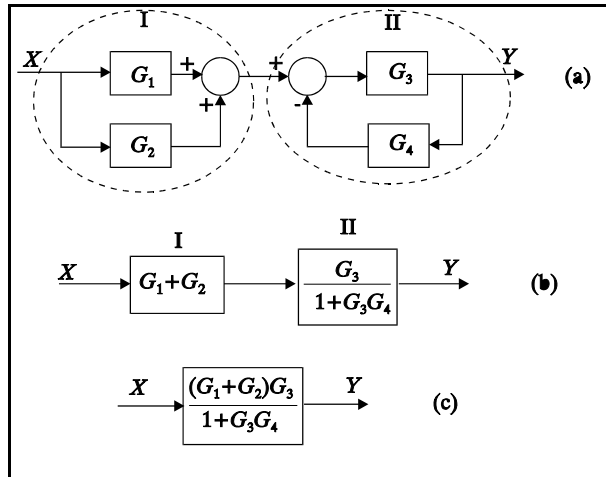


Slika P-2.4.4-1. Najjednostavniji ekvivalentni blok dijagram nivo sistema prvog reda

Treba primetiti da je prenosna funkcija sistema prvog reda dobijena rešavanjem detaljnog blok dijagrama, identična sa prenosnom funkcijom dobijenom primenom Laplasove transformacije na diferencijalnu jednačinu koja definiše nestacionarni materijalni bilans ovog sistema (jednačina (2.3-21) u poglavlju 2.3.2.1.).

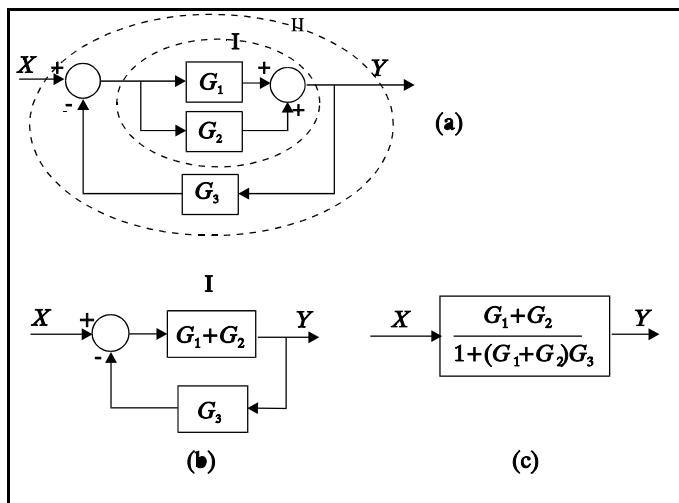
Algebra blok dijagrama se najčešće primenjuje na znatno složenije sisteme od onog prikazanog u prethodnom primeru. Blok dijagrami koje treba rešiti se najčešće sastoje od više zatvorenih kontura. Na slikama 2.4-3. i 2.4-4. je su prikazana dva jednostavna problema rešavanja blok dijagrama.

Na slici 2.4-3(a) imamo blok dijagram koji se sastoji od dve zatvorene konture (u ovom slučaju jedne upravne (kontura I) i jedne povratne sprege (kontura II)) koje su redno vezane. U takvom slučaju se te dve konture rešavaju nezavisno i svaka se prikazuje svojim ekvivalentnim blokom (slika 2.4-3(b)), da bi se zatim primenilo pravilo o rednoj vezi dva bloka (slika 2.4-3(c)).



Slika 2.4-3. Primer rešavanja blok dijagrama sa dve redno vezane zatvorene konture

Na slici 2.4-4(a) je prikazan blok dijagram koji se sastoji od dve zatvorene konture od kojih je jedna (kontura I) potpuno obuhvaćena drugom (kontura II). U ovom slučaju se blok dijagram rešava tako što se prvo reši unutrašnja kontura i zamenjuje se svojim ekvivalentnim blokom (slika 2.4-4(b)), a zatim se rešava spoljašnja kontura (slika 2.4-4(c)).



Slika 2.4-4. Primer rešavanja blok dijagrama sa dve zatvorene konture od kojih se jedna nalazi unutar druge

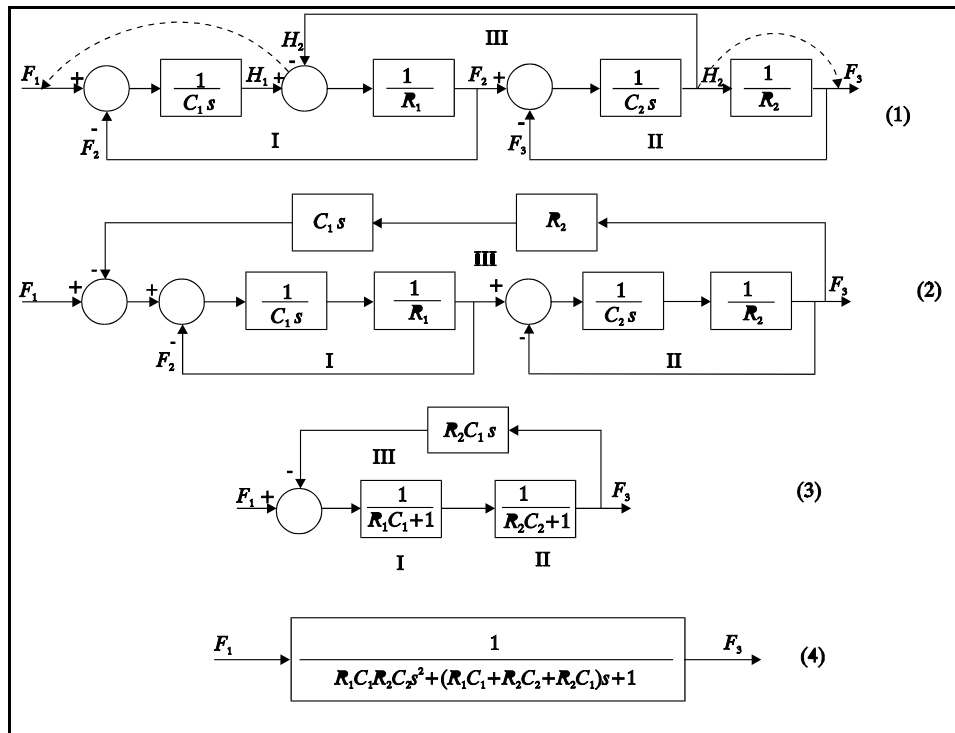
**PRIMER 2.4-5.** Rešavanje blok dijagrama dobijenog u primeru 2.4-1.

Blok dijagrami realnih sistema najčešće nisu tako jednostavni za rešavanje kao oni prikazani u prethodnim primerima, jer se javljaju zatvorene konture koje nisu međusobno razdvojene. U tom slučaju se blok dijagram rešava tako što se primenom različitih ekvivalentnih transformacija definisanih u Tabeli 2.4-2. prevodi u jednostavniji ekvivalentni oblik kod koga su sve zatvorene konture razdvojene (tako da

odgovara slučajevima prikazanim na slici 2.4-3. ili slici 2.4-4.). U nastavku ćemo prikazati rešavanje blok dijagrama dobijenog u primeru 2.4-3. koji predstavlja upravo ovakav slučaj.

**PRIMER 2.4-6.** Rešavanje blok dijagrama dva sistema prvog reda vezana na red sa međudejstvom, formiranog u primeru 2.4-3.

Blok dijagram dva nivo sistema prvog reda vezana na red sa međudejstvom smo izveli u primeru 2.4-3. i prikazali na slici P-2.4-3. On se sastoji od tri zatvorene konture sa negativnom povratnom spregom koje nisu nezavisne. Ovaj blok dijagram se može rešiti u nekoliko stupnjeva. Jedan od načina rešavanja je prikazan na slici P-2.4.6.



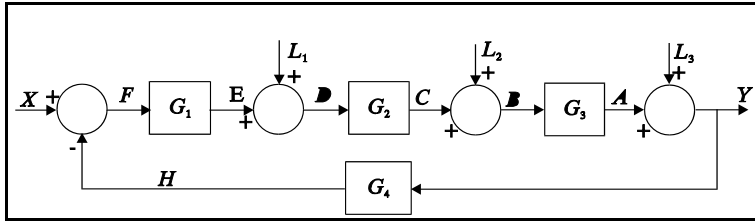
Slika P-2.4.6. Rešavanje blok dijagrama za dva nivo sistema vezana na red sa međudejstvom

Može se uočiti da je ukupna prenosna funkcija ovog sistema, upisana u blok prikazan stupnjem (4) identična sa prenosnom funkcijom koju smo za isti sistem dobili rešavanjem sistema jednačina kojima je definisan dinamički model ovog sistema (jednačina (2.3-77), u poglavlju 2.3.4.3.).

U svim dosadašnjim primerima rešavanja blok dijagrama, imali smo slučajeve sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom, koji se mogu transformisati u najjednostavniji blok dijagram koji sadrži samo jedan blok. Kada blok dijagram predstavlja sistem sa više ulaza i/ili izlaza, nije ga moguće svesti na ovakav oblik, već se dobija blok dijagram koji sadrži onoliko blokova koliko prenosnih funkcija se može definisati za taj sistem. Kao ilustraciju ovoga ćemo prikazati rešavanje blok dijagrama sa jednom zatvorenom konturom u obliku negativne povratne sprege i sa više ulaza.

**PRIMER 2.4-7.** Rešavanje blok dijagrama sa više ulaza

Blok dijagram predstavljen na slici P-2.4.7-1. treba svesti na najjednostavniji oblik. Ovaj blok dijagram predstavlja uobičajeni oblik zatvorenog regulacionog kola sa negativnom povratnom spregom, pri čemu se ulaz  $X$  naziva *postavna tačka* i predstavlja željenu vrednost izlaza koju zadaje operater koji vodi proces, dok se ulazi  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  nazivaju *promenljive opterećenja* i predstavljaju poremećaje koji deluju na sistem.



Slika P-2.4.7-1. Primer blok dijagrama sa više ulaza

Ovaj blok dijagram je jednostavan (ima samo jednu zatvorenu konturu), i može se lako rešiti primenom jednostavne algebre:

$$\begin{aligned}
 Y &= L_3 + A \\
 &= L_3 + G_3 B \\
 &= L_3 + G_3 (L_2 + C) \\
 &= L_3 + G_3 (L_2 + G_2 D) \\
 &= L_3 + G_3 L_2 + G_2 G_3 (L_1 + E) \\
 &= L_3 + G_3 L_2 + G_2 G_3 L_1 + G_2 G_3 G_1 F \\
 &= L_3 + G_3 L_2 + G_2 G_3 L_2 + G_1 G_2 G_3 (X - H) \\
 &= L_3 + G_3 L_2 + G_2 G_3 L_2 + G_1 G_2 G_3 X - G_1 G_2 G_3 G_4 Y
 \end{aligned}$$

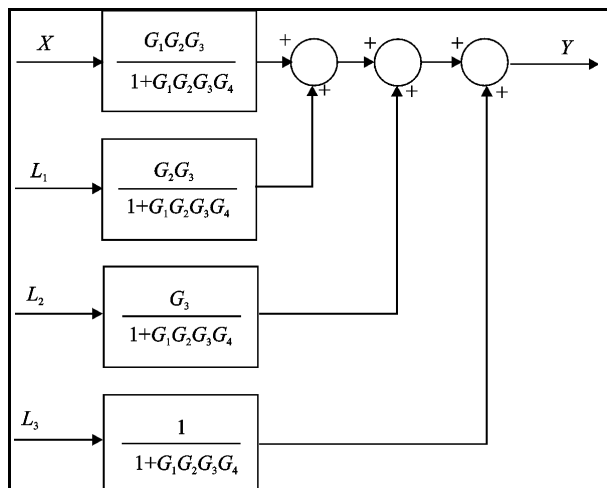
Ako izjednačimo prvu i poslednju jednačinu u ovom nizu, dobijamo:

$$Y = L_3 + G_3 L_2 + G_2 G_3 L_2 + G_1 G_2 G_3 X - G_1 G_2 G_3 G_4 Y$$

Odavde se može izvesti zavisnost izlaza Y od svih ulaza (X, L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> i L<sub>3</sub>):

$$Y = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4} X + \frac{G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4} L_1 + \frac{G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4} L_2 + \frac{1}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4} L_3 \quad (\text{P-2.4.7-1})$$

Blok dijagram koji odgovara ovom izrazu je prikazan na slici P-2.4.7-2.



Slika P-2.4.7-2. Najjednostavniji blok dijagram negativne povratne sprege sa više ulaza (ekvivalentan blok dijagramu sa slike P-2.4.7-1.)

GENERALIZACIJA: Na osnovu primera 2.4-7. se može generalizovati zaključak koji smo izveli o prenosnoj funkciji negativne povratne sprege. *Ukupna prenosna funkcija sistema sa negativnom povratnom spregom se dobija kao razlomak u čijem brojiocu se nalazi proizvod svih blokova koji se nalaze u direktnoj grani između posmatranog ulaza i izlaza, a u imeniocu 1 + proizvod svih blokova u zatvorenoj konturi. Treba primetiti da su imenioci svih prenosnih funkcija koje odgovaraju jednom sistemu sa povratnom spregom identični.*

Ovo pravilo o eliminaciji negativne povratne sprege je vrlo važno, jer ovaj blok dijagram predstavlja informacionu strukturu koja se koristi pri projektovanju velike većine sistema automatskog upravljanja.

## 2.7. VREMENSKI ODZIVI SISTEMA

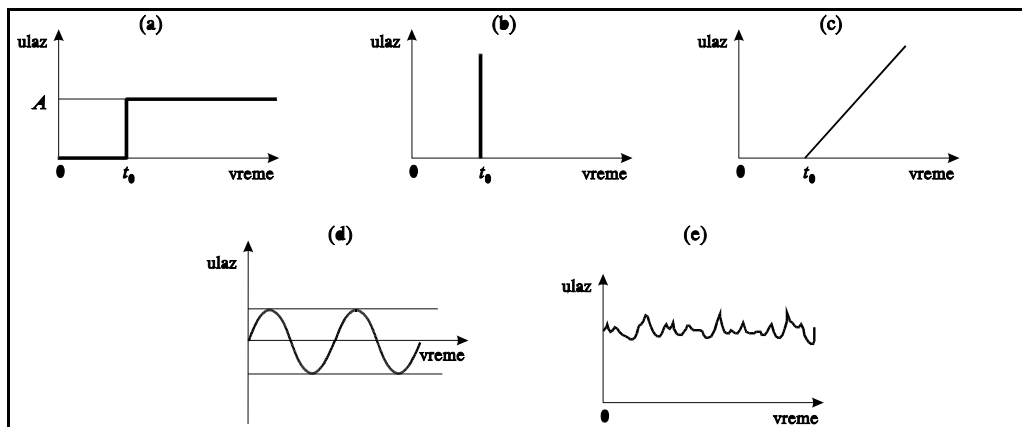
Najpogodniji način da se sagleda dinamičko ponašanje nekog sistema je da se nađe njegov odziv na neku definisanu ulaznu promenu. Pod *vremenskim odzivom* sistema na datu ulaznu funkciju podrazumevamo vremensku zavisnost izlazane promenljive za zadatu promenu ulazane promenljive.

Teorijsko nalaženje odziva sistema se svodi na rešavanje sistema diferencijalnih jednačina kojima je opisana dinamika sistema, za definisanu promenu ulaznih promenljivih i date početne uslove. Pri tome se vrlo često koriste Laplasova i inverzna Laplasova transformacija.

Standardne ulazne funkcije. Dinamika sistema se najčešće ispituje nalaženjem odziva na neki od standardnih ulaza: stepenasti (u obliku Hevisajdove funkcije), impulsni (u obliku Dirakove funkcije), linearni, sinusni ili stohastički ulaz u obliku belog šuma (slika 2.7-1.(a-e)). Pri tome je uobičajeno korišćenje sledećih izraza:

- *impulsni odziv* za odziv na impulsnu promenu ulaza
- *stepensati (odskočni) odziv* za odziv na stepenastu promenu ulaza
- *frekventni odziv* za odziv na sinusnu promenu ulaza

Kada je amplituda ulaza jednaka jedinici, govori se o *jediničnom odzivu*.



Slika 2.7-1. Standardne ulazne funkcije za ispitivanje dinamike sistema: (a) stepenasta; (b) impulsna; (c) linearna; (d) sinusna; (e) beli šum

Pošto se ova knjiga ne bavi stohastičkim procesima i promenljivim, u okviru nje neće biti posmatrani odzivi sistema na ulaznu promenu u obliku belog šuma.

Nalaženje vremenskog odziva sistema korišćenjem Laplasove i inverzne Laplasove transformacije. Uobičajeni način za teorijsko dobijanje vremenskih odziva sistema je da se počne od dinamičkog modela sistema u Laplasovom domenu, odnosno od prenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (2.7-1)$$

Ulazna promena koja je definisana nekom vremenskom funkcijom  $x(t)$  se prevodi u Laplasov domen:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x^p(t)\} = \mathcal{L}\{x(t) - x_s\} \quad (2.7-2)$$

Množenjem ulaza u Laplasovom domenu  $X(s)$  sa prenosnom funkcijom sistema dobija se izlaz u Laplasovom domenu:

$$Y(s) = G(s) X(s) \quad (2.7-3)$$

Odziv sistema u vremenskom domenu se dobija nalaženjem inverzne Laplasove transformacije funkcije  $Y(s)$ . Pošto se prenosna funkcija definiše kao odnos Laplasovih transformacija promenljivih odstupanja izlaza i ulaza, dobijena funkcija će predstavljati odstupanje izlaza od njegove vrednosti u stacionarnom stanju, tako da joj treba dodati ovu vrednost da bi se dobila stvarna vrednost izlaza:

$$y(t) = y_s + y^p(t) = y_s + \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \quad (2.7-4)$$

U ovom poglavlju ćemo prikazati nalaženje odziva elementarnih sistema čije smo prenosne funkcije izveli u poglavlju 2.3. Nalaženje odziva proporcionalnog elementa je trivijalno tako da se na njemu nećemo zadržavati. Slično je i sa odzivom elementa sa mrtvim vremenom, jer ovaj element izaziva samo kašnjenje izlazne promene za ulaznom za određeno vreme (mrtvo vreme  $D$ ) ne utičući na oblik same funkcije. Slaganje stepenastog odziva elementa sa mrtvim vremenom koji se dobija na osnovu tačnog modela i na osnovu približnog modela dobijenog Padeovom aproksimacijom, prikazano je u Prilogu B.

Najviše pažnje će biti posvećeno izvođenju izraza za vremenske odzive sistema prvog i drugog reda.

### 2.7.1. Vremenski odzivi sistema prvog reda

Prenosnu funkciju sistema prvog reda smo definisali u poglavlju 2.3.2. Standardni oblik prenosne funkcije sistema prvog reda je:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (2.7-5)$$

Model sistema prvog reda je jednostavan, tako da se i njegovi vremenski odzivi za različite promene ulaza dobijaju relativno jednostavno. S druge strane, mnogi procesi, merni instrumenti i izvršni elementi koji se javljaju u procesnim sistemima se mogu tačno ili približno opisati jednostavnom prenosnom funkcijom prvog reda dok se mnogi sistemi višeg reda mogu prikazati kao kombinacija više sistema prvog reda. Zbog svega ovoga, ispitivanju dinamike sistema prvog reda ćemo pokloniti značajnu pažnju. U daljem tekstu ćemo izvesti izraze za odzive sistema prvog reda na različite ulazne promene prikazane na slici 2.7-1. Zbog jednostavnosti ćemo u svim ovim slučajevima pretpostaviti da su početni uslovi jednaki nuli. Ukoliko to nije tačno, u konkretnom slučaju treba dodati početni uslov.

#### 2.7.1.1. Odziv sistema prvog reda na stepenastu promenu ulaza (Stepenasti odziv)

Ako ulazna promena ima oblik Hevisajdove funkcije:

$$x(t) = A u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.7-6)$$

onda je, kako je pokazano u poglavlju 2.2. (Primer 2.2-1.), Laplasova transformacija ulaza:

$$X(s) = \mathcal{L}\{A u(t)\} = \frac{A}{s} \quad (2.7-7)$$

Laplasova transformacija izlazne promenljive je, za slučaj sistema prvog reda:

$$Y(s) = \frac{A}{s} \left( \frac{K}{\tau s + 1} \right) = A K \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right) \quad (2.7-8)$$

Stepenasti odziv sistema prvog reda u vremenskom domenu dobija se primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu (2.7-8). Primenom osobine linearnosti inverzne Laplasove transformacije na



desnu stranu jednačine:

$$y(t) = AK \left[ \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s + 1/\tau} \right\} \right] \quad (2.7-9)$$

problem se svodi na jednostavno nalaženje tabličnih izraza za inverzne transformacije pojedinih članova iz Tabele 2.2-1. Na ovaj način se dobija izraz za stepenasti odziv sistema prvog reda:

$$y(t) = AK \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (2.7-10)$$

Grafički prikaz odziva sistema prvog reda na stepenastu promenu ulaza, za slučaj  $\tau > 0$  koji odgovara svim primerima sistema prvog reda koje smo prikazali u poglavlju 2.3.2., dat je na slici 2.7-2. U trenutku kada dolazi do stepenaste promene ulaza, izlaz počinje da se povećava, težeći konstantnoj vrednosti kojom je definisano novo stacionarno stanje sistema, kada  $t$  teži beskonačnosti. Nalaženje prvog izvoda izlaza u trenutku  $t=0$  u kome dolazi do stepenaste promene:

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{AK}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{AK}{\tau} \quad (2.7-11)$$

pokazuje da je on obrnuto srazmeran vremenskoj konstanti sistema. U koordinatnom sistemu koji je upotrebljen na slici 2.7-2, koeficijent pravca tangente na odzivnu krivu za  $t=0$  iznosi +1.

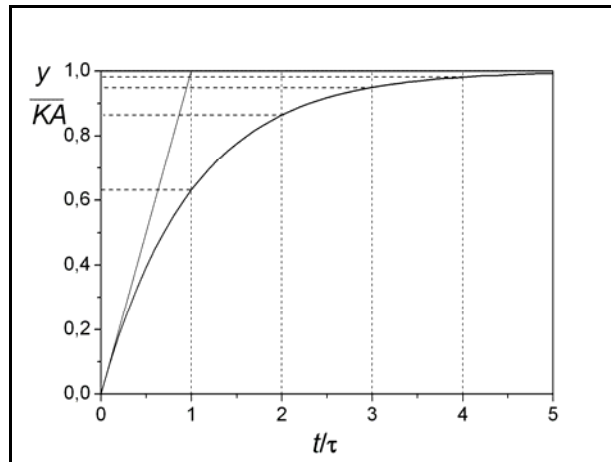
Jedan od interesantnih rezultata vezanih za odziv sistema prvog reda su vrednosti izlaza koje se dobijaju posle jedne, dve, tri, četiri i pet vremenskih konstanti. Ovaj rezultat je prikazan grafički na slici 2.7-2. i numerički u Tabeli 2.7-1.

TABELA 2.7-1. Vrednosti stepenastog odziva sistema prvog reda posle jedne, dve, tri, četiri i pet vremenskih konstanti

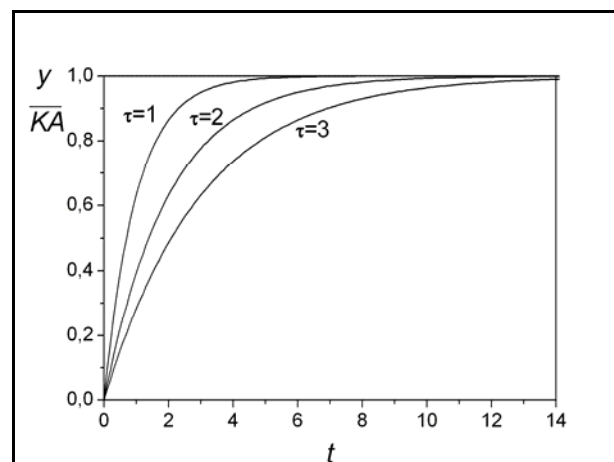
$t$	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$y/KA$	0.632	0.865	0.950	0.982	0.993

Tabela 2.7-1. pokazuje da se najveća promena izlaza dešava u toku početnog perioda koji odgovara jednoj vremenskoj konstanti (63.2%) da bi promena zatim postajala sve sporija. Teorijski se novo stacionarno stanje dostiže posle beskonačno dugog vremena, ali praktično možemo smatrati da je ono dostignuto već posle pet vremenskih konstanti.

Na slici 2.7-3. je prikazan odziv sistema prvog reda za tri različite vrednosti vremenske konstante. Kao što se vidi, odziv sistema prvog reda je utoliko sporiji ukoliko je vremenska konstanta sistema veća. Može se reći da vremenska konstanta predstavlja meru inercije sistema prvog reda.



Slika 2.7-2. Stepenasti odziv sistema prvog reda



Slika 2.7-3. Zavisnost odziva sistema prvog reda od vremenske konstante

## 2.7.1.2. Odziv sistema prvog reda na impulsnu promenu ulaza (Impulsni odziv)

Impulsna funkcija prikazana na slici 2.7-1.(b) se matematički najčešće definiše na sledeći način:

$$x(t) = A \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases} \quad i \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = A \quad (2.7-12)$$

Kao što je navedeno u poglavlju 2.2. (Tabela 2.2-1.), Laplasova transformacija ove funkcije je, za  $t_0=0$ :

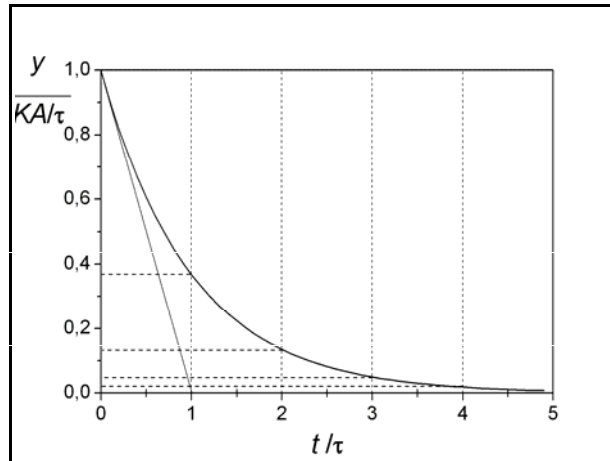
$$X(s) = \mathcal{L}\{A \delta(t)\} = A \quad (2.7-13)$$

U slučaju ovakvog ulaza, odziv sistema prvog reda, definisanog prenosnom funkcijom (2.7-5), u Laplasovom domenu će biti:

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} A = \frac{A K / \tau}{s + 1/\tau} \quad (2.7-14)$$

Impulsni odziv sistema prvog reda u vremenskom domenu dobija se primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu (2.7-14):

$$y(t) = \frac{A K}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (2.7-15)$$



Slika 2.7-4. Impulsni odziv sistema prvog reda

Grafički prikaz ove funkcije dat je na slici 2.7-4. Kao što se vidi, u trenutku u kome dolazi do impulsne promene ulaza vrednost izlaza postaje jednaka  $AK/\tau$  ( $A$  je "veličina" impulsa,  $K$  pojačanje i  $\tau$  vremenska konstanta sistema prvog reda), da bi se zatim eksponencijalno smanjivala težeći nuli kada vreme teži beskonačnosti.

## 2.7.1.3. Odziv sistema prvog reda na linearnu promenu ulaza

Ako se ulaz u sistem prvog reda menja po najjednostavnijoj linearnoj funkciji:

$$x(t) = bt \quad (2.7-16)$$

ili u Laplasovom domenu:

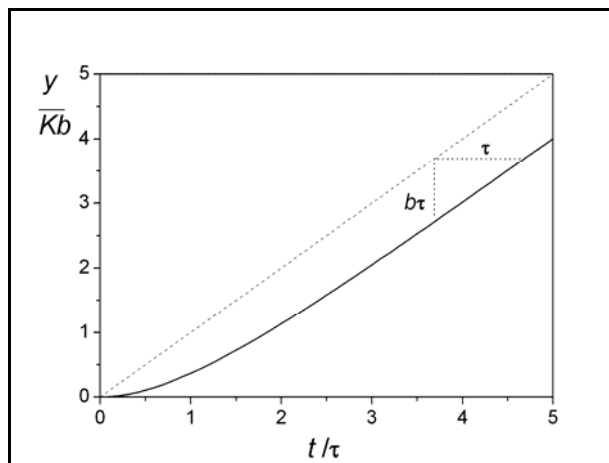
$$X(s) = \frac{b}{s^2} \quad (2.7-17)$$

Laplasova transformacija izlaza će biti:

$$Y(s) = \frac{b}{s^2} \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{bK}{s^2} - \frac{bK\tau}{s} + \frac{bK\tau}{s + 1/\tau} \quad (2.7-18)$$

Nalaženjem inverzne Laplasove transformacije ove jednačine dobija se izraz za vremenski odziv sistema prvog reda na linearnu promenu ulaza:

$$y(t) = Kb t - Kb\tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2.7-19)$$



Slika 2.7-5. Odziv sistema prvog reda na linearnu promenu ulaza

Grafički prikaz ove funkcije dat je na slici 2.7-5. Kao što se vidi, sistem prvog reda u ovom slučaju ne dolazi u novo stacionarno stanje, jer na njega stalno deluje promenljivi ulaz u obliku linearne funkcije.

Izlazna promenljiva na neki način prati ulaznu promenu, ali stalno "kasni" za njom. Za slučaj jediničnog pojačanja sistema prvog reda ( $K=1$ ) linije ulaza i izlaza su paralelne kada  $t \rightarrow \infty$ . Razlika između ulaza i izlaza je najmanja na početku delovanja linearne promene ulaza, a zatim se povećava. Za slučaj  $K=1$ , razlika između izlaza i ulaza teži konačnoj maksimalnoj vrednosti:

$$K = 1: |x(t) - y(t)|_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |b\tau(1 - e^{-t/\tau})| = b\tau \quad (2.7-20)$$

Praktično se ovaj uslov postiže već posle oko pet vremenskih konstanti.

#### 2.7.1.4. Odziv sistema prvog reda na sinusnu promenu ulaza (Frekventni odziv)

Ukoliko se ulazna promenljiva menja u obliku sinusne funkcije:

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (2.7-21)$$

čija je Laplasova transformacija:

$$X(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.7-22)$$

odziv sistema prvog reda u Laplasovom domenu postaje:

$$Y(s) = \left( \frac{K}{\tau s + I} \right) \left( \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (2.7-23)$$

Jednostavnim algebarskim manipulacijama, ovaj izraz se može transformisati u oblik:

$$Y(s) = \left( \frac{KA\omega\tau}{I + \tau^2\omega^2} \right) \left( \frac{I}{s + I/\tau} \right) + \left( \frac{KA}{I + \tau^2\omega^2} \right) \left( \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) - \left( \frac{KAT\omega}{I + \tau^2\omega^2} \right) \left( \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) \quad (2.7-24)$$

čija se inverzna Laplasova transformacija može dobiti direktnom primenom osobine linearnosti i tablica Laplasovih transformacija:

$$y(t) = \frac{KA\tau\omega}{I + \tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{KA}{I + \tau^2\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{KA\tau\omega}{I + \tau^2\omega^2} \cos(\omega t) \quad (2.7-25)$$

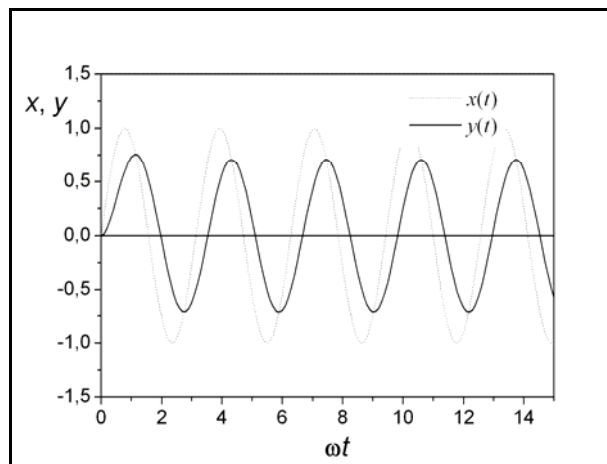
Daljim transformacijama, uz korišćenje poznatog trigonometrijskog izraza za sinusnu funkciju zbira, odziv sistema prvog reda na sinusnu promenu ulaza se može prikazati u konačnom obliku:

$$y(t) = \frac{KA\tau\omega}{I + \tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{KA}{\sqrt{I + \tau^2\omega^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad \phi = \arctan(-\tau\omega) \quad (2.7-26)$$

Za veliko  $t$ , prvi, eksponencijalni član, teži nuli, tako da odziv sistema prvog reda na sinusnu promenu ulaza postaje takođe sinusna funkcija, sa istom frekvencijom kao ulaz, ali sa promenjenom amplitudom i fazno pomerena u odnosu na ulaz (slika 2.7-6.).

Odziv sistema na sinusnu promenu ulaza kada  $t$  teži beskonačnosti (kvazistacionarni odziv) naziva se frekventni odziv i njime su definisane frekventne karakteristike sistema. Zbog njihovog velikog značaja pri projektovanju linearnih sistema upravljanja, frekventne karakteristike sistema će biti posebno obrađene u sledećem poglavlju.

U sledećih nekoliko primera će biti ilustrovano određivanje vremenskih konstanti i nalaženje odziva sistema prvog reda. Primeri se odnose



Slika 2.7-6. Odziv sistema prvog reda na sinusnu promenu ulaza

na stepenasti odziv koji je od posebnog značaja pri izučavanju dinamike procesa koji se javljaju u procesnoj industriji. Ovi primeri bi trebalo da pomognu u razjašnjavanju pojmova stacionarnog stanja, pojačanja, vremenske konstante i brzine odziva sistema prvog reda.

PRIMER 2.7-2. Određivanje vremenske konstante termometra na osnovu eksperimentalnih podataka

Živin termometar je uravnotežen sa vazduhom temperature 291 K. U trenutku  $t=0$  kugla termometra se ubacuje u uljano kupatilo temperature 473 K. Vrednosti temperature koju pokazuje termometar su praćene u toku vremena i date u tablici:

$t(s)$	$T_t(K)$	$t(s)$	$T_t(K)$
0	291.0	15	426.5
1	306.8	21	446.0
3	334.4	28	458.7
6	367.5	36	659.1
10	399.7	45	470.0

Odrediti vremensku konstantu termometra u ulju.

REŠENJE:

Kao što je pokazano u poglavlju 2.3.2.2., živin termometar predstavlja sistem prvog reda sa jediničnim pojačanjem. Njegova prenosna funkcija je:

$$G(s) = \frac{T_t(s)}{T_f(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

a odziv na stepenastu promenu temperature okolnog fluida od  $T_{f0}$  do  $T_{f\infty} = T_{f0} + A$ :

$$T_t(t) = T_{f0} + A(1 - e^{-t/\tau}) \quad (\text{P-2.7.2-1})$$

Pošto je u našem slučaju termometar na početku uravnotežen sa temperaturom okoline:

$$T_{f0} = T_{f\infty} = 291 \text{ K}$$

i pošto je:

$$T_{f\infty} = 473 \text{ K}$$

amplituda ulazne stepenaste promene iznosi:

$$A = 473 - 291 = 182 \text{ K}$$

Vremenska promena temperature koju pokazuje termometar se tako može prikazati jednačinom:

$$T_t(t) = 291 + 182(1 - e^{-t/\tau})$$

u kojoj imamo nepoznatu vremensku konstantu  $\tau$  koju treba odrediti na osnovu eksperimentalnih podataka datih u tablici.

Prikazaćemo tri načina za određivanje vremenske konstante sistema prvog reda na osnovu njegovog stepenastog odziva:

(a) *Određivanje vremenske konstante sistema prvog reda na osnovu vremena potrebnog da se dostigne 63.2% ukupne promene*

Na slici P-2.7.2-1. su grafički prikazani podaci iz tablice (oblik krive ukazuje da je pretpostavka da se radi o sistemu prvog reda ispravna). Tačkastom linijom je povučena horizontalna linija koja odgovara 63.2% ukupne promene odziva:

$$T_t(63.2\%) = T_{f0} + 0.632(T_{f\infty} - T_{f0}) = 291 + 0.632(473 - 291) = 406 \text{ K}$$

Sa dijagrama se može očitati da termometar pokazuje ovu temperaturu posle 11 sekundi od početka delovanja stepenaste promene. Kao što se može videti iz tabele 2.7-1. ovo vreme je jednako vremenskoj konstanti sistema prvog reda:

$$\tau_{(a)} \approx 11 \text{ s}$$

(b) *Određivanje vremenske konstante prvog reda na osnovu tangente u tački ( $t=0, T_t=T_{t0}$ )*

Na slici P-2.7.2-1. je takođe, isprekidanom linijom, prikazana tangenta na krivu odziva za  $t=0$ . Koficijent pravca ove tangente je definisan jednačinom (2.7-11) i za termometar kod koga je  $K=1$  iznosi:

$$a = A/\tau$$

Može se lako pokazati da ova tangenta seče horizontalnu liniju koja definiše novo stacionarno stanje ( $T_{t\tau}=T_{t\tau}$ ) za  $t=\tau$ . Na osnovu ovoga se sa dijagrama može direktno očitati vremenska konstanta termometra:

$$\tau_{(b)} \approx 11 \text{ s}$$

(c) *Određivanje vremenske konstante sistema prvog reda na osnovu linearizovanog izraza za stepenasti odziv*

Izraz za stepenasti odziv sistema prvog reda:

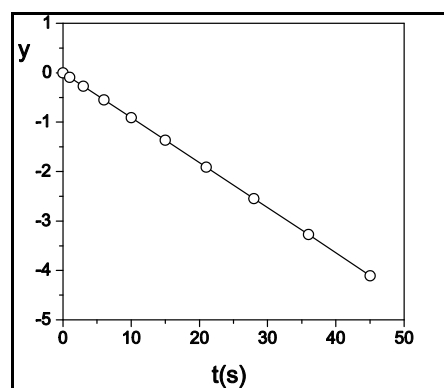
$$T_t(t) = T_t0 + A(1 - e^{-t/\tau})$$

je nelinearan, ali se vrlo jednostavno može linearizovati, definisanjem sledeće funkcije:

$$y = \ln\left(1 - \frac{T_t - T_t0}{A}\right) = -\frac{1}{\tau} t \quad (\text{P-2.7.2-2})$$

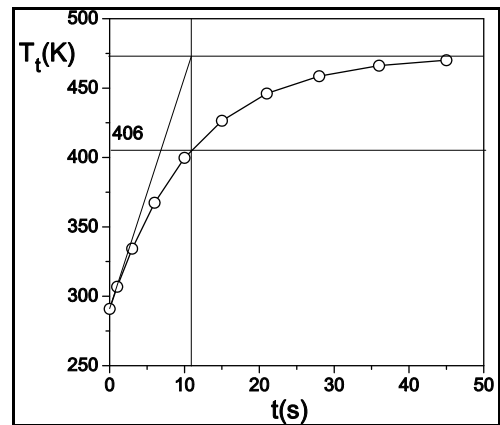
Ovo je jednačina prave koja prolazi kroz koordinatni početak i ima koficijent pravca  $-1/\tau$ . Kada se na osnovu vrednosti temperature iz tablice izračunaju vrednosti  $y$ , dobijamo sledeće rezultate:

$t(\text{s})$	$y$
0.	0.000
1.	-0.091
3.	-0.272
6.	-0.545
10.	-0.909
15.	-1.365
21.	-1.908
28.	-2.544
36.	-3.272
45.	-4.105



Slika P-2.7.2-2. Određivanje vremenske konstante sistema prvog reda na osnovu nagiba linearizovane jednačine odziva

Na slici P-2.7.2-2. je prikazana zavisnost  $y=f(t)$ . Kao što smo očekivali, dobijena je prava linija, čime smo dokazali da je posmatrani termometar zaista sistem prvog reda. Vremenska konstanta sistema prvog reda se dobija kao negativna recipročna vrednost koficijenta pravca ove prave:



Slika P-2.7.2-1. Određivanje vremenske konstante sistema prvog reda na osnovu tangente za  $t=0$  i na osnovu tangente za  $t=0$

$$b = -\frac{l}{\tau} \quad \tau = -\frac{l}{b} \quad (\text{P-2.7.2-3})$$

Koeficijent pravca linearizovane jednačine odziva  $b$  se može dobiti direktnim očitavanjem sa slike P-2.7.2-2. ili korišćenjem metode najmanjih kvadrata na osnovu parova vrednosti  $t$  i  $y$ :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2} \quad (\text{P-2.7.2-4})$$

Pomoću obe metode se dobija praktično identičan rezultat:

$$b = -0.091$$

tako da je vremenska konstanta termometra:

$$\tau_{(c)} = 10.989 \text{ s} \approx 11 \text{ s}$$

Treba primetiti da su vrednosti vremenske konstante dobijene pomoću sve tri metode identične:  $\tau=11\text{s}$ . Ovo nije uvek slučaj. Treba znati da je metoda prikazana pod (a) najjednostavnija i najbrža, ali i najmanje tačna, dok metoda prikazana pod (c) zahteva najviše vremena, ali je najtačnija.

### PRIMER 2.7-3. Odziv termometra na složenu stepenastu promenu temperature okoline

Termometar čija je vremenska konstanta određena u Primeru 2.7-2. se, u ponovljenom eksperimentu, posle 15 sekundi provedenih u uljanom kupatilu temperature 473K, izvlači iz kupatila (u vazduh temperature 291 K). Naći vremensku promenu temperature koju pokazuje termometar i odrediti temperaturu koju će pokazivati posle 60 sekundi provedenih u vazduhu, ako se zna da je koeficijent prenosa toplote vazduh-termometar deset puta manji od koeficijenta prenosa toplote ulje-termometar.

#### REŠENJE:

Promena temperature okoline koja se meri termometrom se u ovom slučaju sastoji od dve stepenaste promene (isprekidana linija na slici P-2.7.3.), i može se definisati na sledeći način:

$$T_f = \begin{cases} 291 \text{ K}, & t < 0 \\ 473 \text{ K}, & 0 \leq t < 15 \text{ s} \\ 291 \text{ K}, & t \geq 15 \text{ s} \end{cases}$$

Pri tome treba uzeti u obzir da se, zbog velike razlike koeficijenta prenosa toplote u ulju i vazduhu, i vremenska konstanta termometra značajno menja pri prenošenju termometra iz jedne u drugu sredinu. Pošto je vremenska konstanta obrnuto stazmerna koeficijentu prenosa toplote:

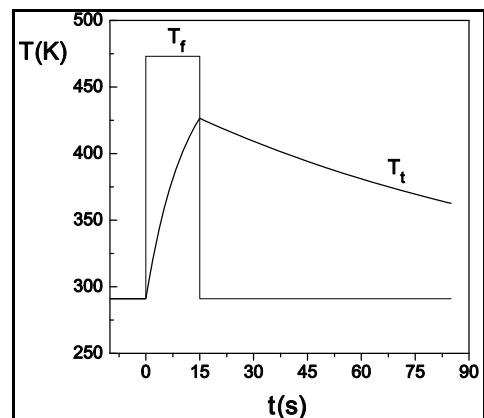
$$\tau = \frac{mc_p}{hA} = \frac{mc_p}{A} \frac{1}{h}$$

i pošto je na osnovu uslova zadatka:

$$h_u = 10 h_v$$

dobija se da je:

$$\tau_v = 10 \tau_u$$



Slika P-2.7.3. Odziv termometra na složenu stepenastu promenu temperature okoline

U ovim jednačinama indeks  $u$  se odnosi na ulje, a indeks  $v$  na vazduh.

Vremenska konstanta termometra u ulju je dobijena u prethodnom primeru:

$$\tau_u = 11 \text{ s}$$

tako da je vremenska konstanta termometra u vazduhu:

$$\tau_v = 10 \times 11 = 110 \text{ s}$$

Pošto je vremenska konstanta termometra različita za periode vremena  $t < 15$  s i  $t > 15$  s, neophodno je posmatrati odziv termometra posebno u prvom i drugom periodu.

*Odziv termometra u vremenskom periodu I* ( $0 < t < 15$  s). Ovaj odziv se može dobiti direktnom primenom jednačina (2.7-10) i (2.7-4):

$$T_{tI} = T_{t0I} + A_I(1 - e^{-t/\tau_I}) \quad (\text{P-2.7.3-1})$$

Vrednosti početne temperature koju pokazuje termometar, amplitude ulazne stepenaste promene i vremenske konstante koje odgovaraju ovom periodu vremena su sledeće:

$$T_{t0I} = 291 \text{ K}, \quad A_I = 473 - 291 = 182 \text{ K}, \quad \tau_I = \tau_u = 11 \text{ s}$$

tako da je odziv termometra u ovom periodu:

$$T_{tI} = 291 + 182(1 - e^{-t/11})$$

U trenutku  $t=15$  s, kada dolazi do druge stepenaste promene temperature okoline, temperatura koju pokazuje termometar će biti:

$$T_{tI}(15) = 291 + 182(1 - e^{-15/11}) = 426.46 \text{ K}$$

*Odziv termometra u vremenskom intervalu II* ( $t > 15$  s). Ukoliko definišemo novu vremensku promenljivu:

$$t' = t - 15$$

vremenska zavisnost temperature koju pokazuje termometar u drugom periodu se opet može prikazati u obliku:

$$T_{tII}(t) = T_{t'0II} + A_{II}(1 - e^{-t'/\tau_{II}}) \quad (\text{P-2.7.3-2})$$

Početni uslov za ovaj period vremena definisan je temperaturom koju je termometar dostigao u trenutku delovanja druge promene:

$$T_{t'0II} = T_{tI}(15) = 426.46 \text{ K}$$

dok je amplituda stepenaste promene:

$$A_{II} = T_{\infty II} - T_{t'0II} = 291 - 426.46 = -135.46 \text{ K}$$

Vremenska konstanta termometra u ovom periodu je vremenska konstanta u vazduhu:

$$\tau_{II} = \tau_v = 110 \text{ s}$$

Zamenom ovih vrednosti i stvarne vremenske promenljive u izrazu za odziv termometra koji odgovara vremenskom intervalu  $t \geq 15$  s, dobijamo sledeći izraz za odziv termometra u ovom periodu:

$$T_{tII}(t) = 426.46 - 135.46(1 - e^{-(t-15)/110})$$

Promena temperature koju pokazuje termometar za čitav period vremena se može prikazati u obliku:

$$T_t(t) = \begin{cases} 291, & t < 0 \\ 291 + 182(1 - e^{-t/11}), & 0 \leq t < 15 \text{ s} \\ 426.46 - 135.46(1 - e^{-(t-15)/110}), & t \geq 15 \text{ s} \end{cases}$$

Ova zavisnost je prikazana punom linijom na slici P-2.7.3.

Temperatura koju termometar pokazuje za  $t'=60$  s ( $t=75$  s) će iznositi:

$$T_t(75) = 369.5 \text{ K}$$

### 2.7.1.5. Odziv sistema prvog reda sa negativnom vremenskom konstantom

Do sada smo analizirali odzive sistema prvog reda na različite promene ulaza, pod pretpostavkom da je vremenska konstanta pozitivna. Ovo je slučaj kod svih primera sistema prvog reda koje smo naveli u poglavlju 2.3.2. Međutim ukoliko bi vremenska konstanta bila negativna, odziv ovog sistema bi bio potpuno drugačiji. To ćemo ilustrovati na primeru odziva na stepenastu promenu ulaza.

Neka je vremenska konstanta sistema prvog reda negativna, tako da je njegova prenosna funkcija:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{I - \tau s} = \frac{K'}{\tau s - I} \quad (2.7-27)$$

( $\tau > 0$ ,  $K' = -K$ ) i neka se ulaz u ovaj sistem menja u obliku stepenaste funkcije:

$$x(t) = A u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{A}{s}$$

Izlaz u Laplasovom domenu će biti:

$$Y(s) = \frac{A}{s} \frac{K'}{\tau s - I} = \frac{K'A}{s - I/\tau} - \frac{K'A}{s} \quad (2.7-28)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije se dobija odziv ovog sistema u vremenskom domenu:

$$y(t) = K'A (e^{t/\tau} - 1) \quad (2.7-29)$$

Grafički prikaz ovog odziva dat je na slici 2.7-7. Kao što se vidi, za konačnu promenu ulaza, dobija se beskonačna promena izlaza. Za razliku od sistema prvog reda sa pozitivnom vremenskom konstantom koji je sistem sa samoregulacijom, jer sam dolazi u novo stacionarno stanje po prestanku delovanja poremećaja, sistem sa negativnom vremenskom konstantom je *nestabilan*. Zbog toga se ovakav element naziva *nestabilan sistem prvog reda*.

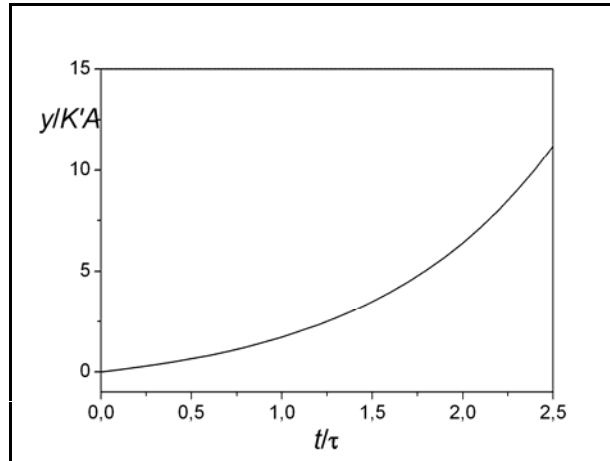
### 2.7.2. Vremenski odzivi sistema drugog reda

U procesnoj industriji nema mnogo procesa koji predstavljaju "prave" sisteme drugog reda. Međutim, dinamički model upravljačke konfiguracije sa negativnom povratnom spregom (zatvorenog regulacionog kola) se često svodi na prenosnu funkciju sistema drugog reda. Zbog toga se izučavanju odziva sistema drugog reda pridaje poseban značaj jer nam daje rezultate koji se mogu primeniti na odziv, odnosno dinamičko ponašanje zatvorenog regulacionog kola.

U poglavlju 2.3.4. smo izveli standardni oblik prenosne funkcije za sistem drugog reda:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + I} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + I} \quad (2.7-30)$$

gde je  $\tau$  vremenska konstanta,  $\omega_n = 1/\tau$  sopstvena (prirodna) frekvencija i  $\xi$  koeficijent prigušenja sistema



Slika 2.7-7. Odziv nestabilnog sistema prvog reda na stepenastu promenu ulaza



drugog reda. Posle nalaženja nula karakterističnog polinoma u imeniocu prenosne funkcije (polova sistema):

$$p_{1/2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{1}{\tau} \sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.7-31)$$

prenosna funkcija se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 \left( s + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \left( s + \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right)} \\ &= \frac{K \omega_n^2}{(s + \xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})} \end{aligned} \quad (2.7-32)$$

Odziv ovog sistema će zavisiti od prirode korena karakteristične jednačine, koja sa druge strane zavisi od vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$ . U principu se mogu javiti sledeći slučajevi:

- za  $\xi < -1$ , koreni karakteristične jednačine su realni, pozitivni i različiti;
- za  $\xi = -1$ , koreni karakteristične jednačine su su realni, pozitivni i jednaki;
- za  $0 < \xi < -1$ , koreni karakteristične jednačine su konjugovano-kompleksni, sa pozitivnim realnim delom;
- za  $\xi = 0$ , koreni karakteristične jednačine su konjugovano-kompleksni sa realnim delom koji je jednak nuli;
- za  $0 < \xi < 1$ , koreni karakteristične jednačine su konjugovano-kompleksni;
- za  $\xi = 1$ , koreni karakteristične jednačine su realni, negativni i jednaki;
- za  $\xi > 1$ , koreni karakteristične jednačine su realni, negativni i različiti.

Postupak teorijskog dobijanja odziva sistema drugog reda ćemo prikazati na primeru odziva na stepenastu promenu ulaza, a zatim ćemo dati i izraze koji se dobijaju za odziv ovog sistema na impulsni i linearni ulaz.

### 2.7.2.1. Stepenasti odziv sistema drugog reda

Za stepenastu promenu ulaza:

$$x^p(t) = A u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{A}{s} \quad (2.7-33)$$

Laplasova transformacija izlaza je:

$$Y(s) = \frac{KA}{\tau^2 s \left( s + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right) \left( s + \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau} \right)} = \frac{KA \omega_n^2}{s(s + \xi \omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi \omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})} \quad (2.7-34)$$

Oblik i postupak dobijanja inverzne Laplasove transformacije ovog izraza će zavisiti od prirode korena karakteristične jednačine  $p_1$  i  $p_2$ , odnosno od vrednosti koeficijenta prigušenja.

(a) *Konjugovano-kompleksni koreni karakteristične jednačine* ( $-1 < \xi < 1$ ):

Za  $-1 < \xi < 1$ , nule polinoma u imeniocu prenosne funkcije su konjugovano-kompleksne vrednosti. Uobičajeni postupak za nalaženje inverzne Laplasove transformacije u ovom slučaju je, da se ne vrši faktorizacija polinoma u imeniocu prenosne funkcije, već da se u imeniocu zadrži kvadratni član čiji su koreni konjugovano-kompleksni:

$$Y(s) = \frac{KA \omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{KA \omega_n^2}{s((s + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2(I - \xi^2))} \quad (2.7-35)$$

i da se jednačina (2.7-35) razvije u zbir parcijalnih razlomaka na sledeći način:

$$Y(s) = \frac{KA}{s} - \frac{KA s + 2KA\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(I - \xi^2)} \quad (2.7-36)$$

Ovaj izraz se pomoću jednostavnih algebarskih transformacija može prevesti u oblik pogodan za nalaženje inverzne Laplasove transformacije:

$$Y(s) = \frac{KA}{s} - KA \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(I - \xi^2)} - KA \frac{\xi}{\sqrt{I - \xi^2}} \frac{\omega_n \sqrt{I - \xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(I - \xi^2)} \quad (2.7-37)$$

Inverzna Laplasova transformacija desne strane ove jednačine se dobija direktno, primenom osobine linearnosti i tablica Laplasovih transformacija:

$$y^p(t) = KA - KA e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{I - \xi^2} t) - KA \frac{\xi}{\sqrt{I - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{I - \xi^2} t) \quad (2.7-38)$$

Ovaj izraz se može pojednostaviti, primenom jednostavnih trigonometrijskih transformacija:

$$\begin{aligned} y^p(t) &= KA \left( I - \frac{I}{\sqrt{I - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{I - \xi^2} t + \phi) \right) \\ &= KA \left( I - \frac{I}{\sqrt{I - \xi^2}} e^{-\xi t/\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{I - \xi^2}}{\tau} t + \phi\right) \right), \quad \phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{I - \xi^2}}{\xi}\right) = \arccos(\xi) \end{aligned} \quad (2.7-39)$$

Kao što pokazuje jednačina (2.7-39), stepenasti odziv sistema drugog reda kod koga je koeficijent prigušenja manji od jedan je oscilatoran. Pri tome je, kod svih pravih sistema drugog reda kod kojih se javlja kretanje i inercija (kakav je U-manometar sa tečnošću, opisan u poglavlju 2.3.4.5.) i svih sistema drugog reda koji predstavljaju kombinaciju dva sistema prvog reda, koeficijent prigušenja pozitivan, tako da se amplituda oscilacija koja je određena eksponentom ( $-\xi\omega_n t$ ) smanjuje u toku vremena i oscilacije se postepeno smiruju. Ovakav odziv se često naziva *nedovoljno prigušen odziv*, a sistem koji daje ovakav odziv i kome odgovara koeficijent prigušenja  $0 < \xi < 1$  se naziva *nedovoljno prigušen sistem*.

Za vrednost koeficijenta prigušenja  $\xi=0$  koja odgovara paru konjugovano-kompleksnih korena karakteristične jednačine sa realnim delom jednakim nuli, dobija se oscilatoran odziv sa konstantnom amplitudom. Za ovakav sistem kažemo da je *neprikušen*.

I na kraju, za vrednosti koeficijenta prigušenja  $-1 < \xi < 0$ , izlaz iz sistema drugog reda bi pri stepenastoj promeni ulaza oscilovao sa amplitudom koja se povećava u toku vremena i sistem bi bio nestabilan. Ovakvo ponašanje odgovara paru konjugovano-kompleksnih korena karakteristične jednačine sa pozitivnim realnim delom. Iako se slučajevi kod kojih je  $\xi \neq 0$  ne javljaju kod sistema drugog reda opisanih u poglavlju 2.3.4., oni mogu da se jave kod složenijih sistema kakvo je zatvoreno regulaciono kolo o kome će biti reči u četvrtom delu ove knjige, ili na primer neizotermni protočni reaktor sa idealnim mešanjem čiji smo dinamički model izveli u poglavlju 2.5.1.2.

(b) *Realni i jednaki koreni karakteristične jednačine* ( $\xi=1$  ili  $\xi=-1$ ):

U slučaju kada je  $\xi=1$ , koreni karakteristične jednačine, odnosno polovi sistema su realni, negativni i jednaki:

$$p_1 = p_2 = -\omega_n \quad (2.7-40)$$

Jednačina (2.7-34) se u ovom slučaju svodi na oblik:

$$Y(s) = \frac{KA\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \quad (2.7-41)$$

čijim se razvijanjem u zbir parcijalnih razlomaka dobija:

$$Y(s) = \frac{KA}{s} - \frac{KA}{s + \omega_n} - \frac{KA\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \quad (2.7-42)$$

Inverznom Laplasovom transformacijom ove jednačine, dobija se:

$$y^p(t) = KA \left( 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} \right) = KA \left( 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right) \quad (2.7-43)$$

Odziv sistema drugog reda prikazan jednačinom (2.7-44) naziva se *kritično prigušen odziv*, a sistem koji daje ovakav odziv (sistem kod koga je  $\xi=1$ ) naziva se *kritično prigušen sistem*.

U slučaju kada je  $\xi=-1$ , odnosno kada su koreni karakteristične jednačine realni, jednaki i pozitivni, izraz za stepenasti odziv se može dobiti potpuno analognim postupkom. Pri tome se dobija sledeća zavisnost:

$$y^p(t) = KA \left( 1 - (1 + \omega_n t) e^{\omega_n t} \right) = KA \left( 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{t/\tau} \right) \quad (2.7-44)$$

Za razliku od kritično prigušenog odziva koji se povećava težeći konačnoj vrednosti  $KA$ , odziv sistema drugog reda kome odgovara  $\xi=-1$  teži beskonačnosti kada  $t \rightarrow \infty$ .

(c) *Realni i različiti koreni karakteristične jednačine* ( $\xi < -1$  ili  $\xi > 1$ ):

Kada je su koreni karakteristične jednačine realni i različiti, prenosna funkcija sistema drugog reda se može napisati u obliku:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (2.7-45)$$

koji odgovara rednoj vezi dva sistema prvog reda. Prividne vremenske konstante  $\tau_1$  i  $\tau_2$  se mogu dobiti na osnovu identiteta:

$$\tau_1 \tau_2 = \tau^2, \quad \tau_1 + \tau_2 = 2\xi\tau \quad (2.7-46)$$

odnosno kao recipročne vrednosti polova sistema:

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2} = \frac{1}{\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (2.7-47)$$

Jednačina (2.7-34) se u ovom slučaju može prikazati u obliku:

$$Y(s) = \frac{KA}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (2.7-48)$$

koji se može razviti u zbir parcijalnih razlomaka, na sledeći način:

$$Y(s) = \frac{KA}{s} - KA \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{1}{s + 1/\tau_1} + KA \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \frac{1}{s + 1/\tau_2} \quad (2.7-49)$$

Inverznom Laplasovom transformacijom se dobija:

$$\begin{aligned} y^p(t) &= KA - KA \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + KA \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \\ &= KA \left( 1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}) \right) \end{aligned} \quad (2.7-50)$$

odnosno:

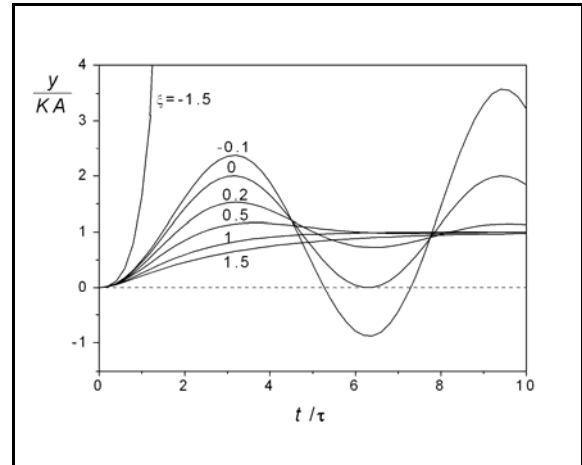
$$y(t) = KA - \frac{KA}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[ (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \exp\left(-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t\right) - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \exp\left(-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t\right) \right] \quad (2.7-51)$$

U slučaju kada je  $\xi > 1$ , korni karakteristične jednačine su realni i negativni, a prividne vremenske konstante pozitivne. Ovaj slučaj odgovara rednoj vezi dva stabilna sistema prvog reda. Odziv ovakvog sistema se dobija u obliku rastuće funkcije koja teži ka konstantnoj vrednosti  $KA$ , kada  $t \rightarrow \infty$ . Ovakav odziv se naziva *previše prigušen odziv*, a sam sistema *previše prigušen sistem* drugog reda.

Sa druge strane, kada je  $\xi < -1$ , korni karakteristične jednačine su pozitivni, a odgovarajuće prividne vremenske konstante negativne. Ovakav sistem se ponaša kao redna veza dva nestabilna sistema prvog reda i njegov odziv eksponencijalno teži beskonačnosti kada  $t \rightarrow \infty$ .

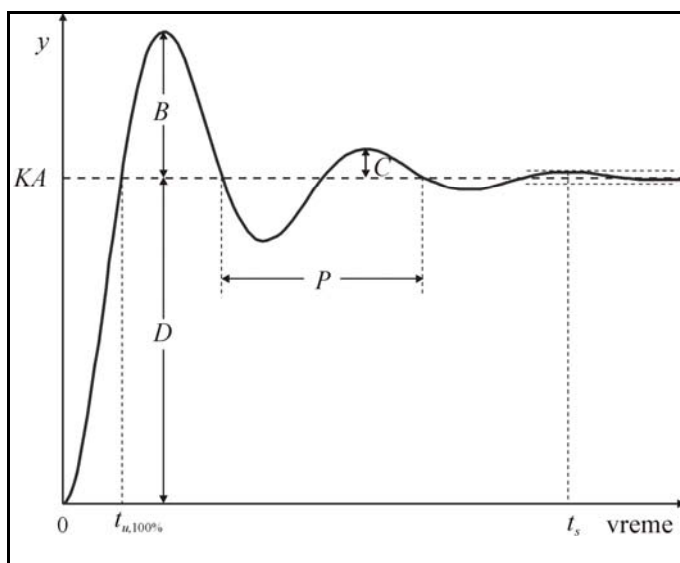
Treba primetiti da su izrazi za stepenasti odziv sistema drugog reda izvedeni za slučaj kada je početni uslov jednak nuli. U konkretnim slučajevima nalaženja odziva, izrazu za odziv, (definisanoj jednačinom (2.7-39), (2.7-43) ili (2.7-50), treba dodati vrednost izlaza u početnom stacionarnom stanju.

Grafički prikaz odziva sistema drugog reda na stepenastu promenu ulaza, za različite vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$ , dat je na slici 2.7-8.



Slika 2.7-8. Odziv sistema drugog reda na stepenastu promenu ulaza, za različite vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$

Kao što se vidi, za  $\xi > 1$  i  $\xi = 1$  dobija se odziv čiji oblik podseća na odziv sistema prvog reda. Treba primetiti da je, za razliku od odziva sistema prvog reda, prvi izvod u tački  $t=0$  jednak nuli, odnosno da kriva stepenastog odziva sistema drugog reda ima karakterističan S-oblik. Za  $0 < \xi < 1$ , dobija se odzivna kriva u obliku oscilatorne funkcije sa amplitudom koja se smanjuje po eksponencijalnom zakonu. Sa smanjenjem koeficijenta prigušenja  $\xi$  povećava se oscilatornost sistema. Za  $\xi = 0$  dobija se neprigušeni odziv koji osciluje sa konstantnom amplitudom i frekvencijom koja je identična sopstvenoj, odnosno prirodnoj frekvenciji  $\omega_n$ . Za  $-1 < \xi < 0$  se dobijaju oscilacije sa amplitudom koja eksponencijalno raste u toku vremena, odnosno, sistem je oscilatoran i nestabilan, dok se za  $\xi \neq -1$  dobijaju odzivi koji eksponencijalno teže beskonačnosti. Ovakav sistem je neoscilatoran i nestabilan.



Slika 2.7-9. Nedovoljno prigušen odziv sistema drugog reda i osnovni kriterijumi kvaliteta odziva

Na slici 2.7-9. je prikazan jedan primer nedovoljno prigušenog odziva stabilnog sistema drugog reda na

stepenastu promenu ulaza i definisani su neki pojmovi koji se koriste kao kriterijumi kvaliteta odziva sistema drugog reda. Ovi kriterijumi zavise od koeficijenta prigušenja  $\xi$  i sopstvene frekvencije  $\omega_n$ , odnosno vremenske konstante  $\tau$ , sistema i definišu se na sledeći način:

- *Ugaona frekvencija oscilovanja:*

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} \quad (2.7-52)$$

- *Period oscilovanja:*

$$P = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.7-53)$$

- *Prekoračenje* - definiše se kao odnos maksimalnog prebačaja odziva preko vrednosti novog stacionarnog stanja i vrednosti tog stacionarnog stanja (odnos dužina  $B$  i  $D$  na slici 2.7-9.). Nalaženjem prvog maksimuma funkcije odziva, klasičnom metodom nalaženja nule prvog izvoda, dobija se zavisnost prekoračenja od koeficijenta prigušenja:

$$PR = \frac{B}{D} = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \quad (2.7-54)$$

Prekoračenje se povećava sa smanjenjem koeficijenta prigušenja.

- *Odnos slabljenja* predstavlja odnos vrednosti prebačaja drugog i prvog maksimuma preko vrednosti novog stacionarnog stanja (odnos dužina  $C$  i  $B$  na slici 2.7-9.). Odnos slabljenja takođe zavisi od koeficijenta prigušenja:

$$O.S. = \frac{C}{B} = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) = PR^2 \quad (2.7-55)$$

i jednak je kvadratu prekoračanja. Odnos slabljenja definiše brzinu smirivanja oscilatornog odziva sistema drugog reda (manjim vrednostima odgovara brže smirivanje i obrnuto) i povećava se sa smanjenjem koeficijenta prigušenja.

- *Vreme uspona* se definiše na dva alternativna načina. Po prvoj definiciji to je vreme potrebno da izlaz sistema prvi put postane jednak vrednosti novog stacionarnog stanja. Ova vrednost se može odrediti na osnovu sledeće jednačine:

$$t_{u,100\%} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \xi^2}} \arctan\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \quad (2.7-56)$$

Po drugoj definiciji, vreme uspona je ono vreme koje je potrebno da se izlaz sistema promeni od 10% do 90% svoje konačne vrednosti. U tom slučaju je vreme uspona može približno prikazati sledećom relacijom:

$$t_{u,10-90\%} \approx \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n} \quad (2.7-57)$$

Vreme uspona definiše brzinu odziva sistema drugog reda. Bilo da se koristi prva ili druga definicija, vreme uspona se povećava sa povećanjem koeficijenta prigušenja i sa smanjenjem sopstvene frekvencije sistema.

- *Vreme smirenja* se definiše kao vreme posle koga odstupanje odziva od vrednosti u stacionarnom stanju ne prelazi određeni procenat (najčešće 2% ili 5%). Ova veličina takođe definiše brzinu smirenja odziva sistema drugog reda.

Kriterijumi vezani za nedovoljno prigušeni odziv sistema drugog reda se često koriste kao kriterijumi kvaliteta regulacije kod zatvorenog regulacionog kola, o čemu će biti reči u poglavlju 4.5.1.1.

## 2.7.2.2. Impulsni odziv sistema drugog reda

Kao i kod stepenastog odziva, i kod impulsnog odziva oblik izlazne funkcije zavisi od prirode korena karakteristične jednačine, odnosno od vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$ . Postupak nalaženja odziva je sličan kao za stepenastu promenu ulaza, s tim što je nalaženje inverznih Laplasovih transformacija nešto jednostavnije. Nećemo prikazati izvođenje, već samo konačne izraze impulsnog odziva sistema drugog reda:

(a) za  $-1 < \xi < 1$ :

$$y(t) = \frac{KA}{\tau} \frac{I}{\sqrt{I - \xi^2}} e^{-\xi t/\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{I - \xi^2}}{\tau} t\right) = \frac{KA \omega_n}{\sqrt{I - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{I - \xi^2} t\right) \quad (2.7-58)$$

(b) za  $\xi = 1$ :

$$y(t) = \frac{KA}{\tau^2} t e^{-t/\tau} = KA \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad (2.7-59)$$

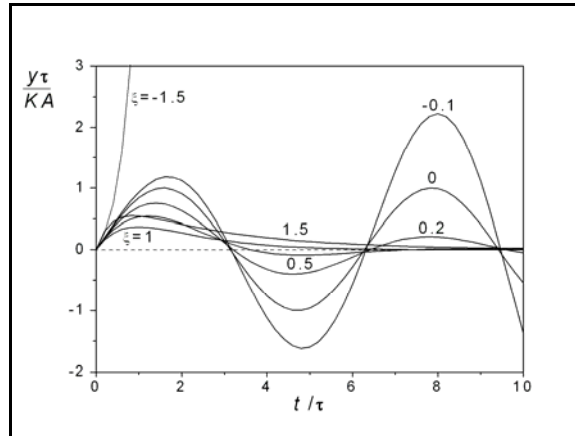
i  $\xi = -1$ :

$$y(t) = \frac{KA}{\tau^2} t e^{t/\tau} = KA \omega_n^2 t e^{\omega_n t} \quad (2.7-59a)$$

(c) za  $\xi > 1$  i  $\xi < -1$ :

$$y(t) = \frac{KA}{\tau_1 - \tau_2} \left( e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right) \quad (2.7-60)$$

Grafički prikaz odziva sistema drugog reda na impulsnu promenu ulaza, za različite vrednosti koeficijenta prigušenja, dat je na slici 2.7-10.



Slika 2.7-10. Impulsni odziv sistema drugog reda za različite vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$

## 2.7.2.3. Odziv sistema drugog reda na linearnu promenu ulaza

Za različite oblasti vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$ , dobijaju se sledeći izrazi za odziv sistema drugog reda na linearnu ulaznu promenu oblika  $x(t) = bt$ .

(a) za  $-1 < \xi < 1$ :

$$y(t) = \frac{bK}{\omega_n} \left[ (\omega_n t - 2\xi) + \frac{I}{\sqrt{I - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{I - \xi^2} t + \phi\right) \right], \quad \phi = 2 \arccos(\xi) \quad (2.7-61)$$

(b) za  $\xi = 1$ :

$$y(t) = \frac{bK}{\omega_n} \left[ (\omega_n t - 2) + (\omega_n t + 2) e^{-\omega_n t} \right] \quad (2.7-62)$$

i  $\xi = -1$ :

$$y(t) = \frac{bK}{\omega_n} \left[ (\omega_n t - 2) + (\omega_n t + 2) e^{\omega_n t} \right] \quad (2.7-62a)$$

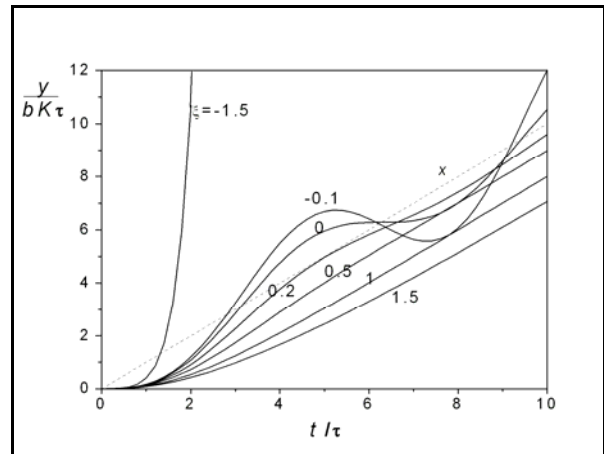
(c) za  $\xi > 1$  i  $\xi < -1$ :

$$y(t) = bK \left[ \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} + t - (\tau_1 + \tau_2) \right] \quad (2.7-63)$$

U jednačinama (2.7-60) i (2.7-63)  $\tau_1$  i  $\tau_2$  su prividne vremenske konstante definisane jednačinom (2.7-46), odnosno (2.7-47).

Grafički prikaz odziva sistema drugog reda na linearnu promenu ulaza, za različite vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$ , dat je na slici 2.7-11.

Nalaženje odziva sistema drugog reda ćemo ilustrovati na primeru jednog inherentnog sistema drugog reda (U-manometra sa tečnošću) i redne veze dva nivo sistema bez i sa međudejstvom.



Slika 2.7-11. Odzivi sistema drugog reda na linearnu promenu ulaza za različite vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$

**PRIMER 2.7-4.** Stepnasti odziv U-manometra sa živom i sa vodom

U manometar sa tečnošću je uravnotežen pri jednakim (atmosferskim) pritiscima koji deluju na oba kraka. U trenutku  $t=0$ , jedan krak se povezuje sa komorom višeg pritiska u kojoj vlada nadpritisak od 10 kPa. Naći vremenski odziv ovog U-manometra na datu promenu razlike pritiska, za slučaj da se kao manometarska tečnost koristi: (a) živa; (b) voda. Prečnik manometarske U-cevi iznosi  $D=0.2$  cm, a dužina stuba manometarske tečnosti  $L=123$  cm. Fizički parametri žive i vode su sledeći:

$$\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \mu_{Hg} = 1.6 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$$

$$\rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \mu_{H_2O} = 10^{-3} \text{ Pa s}$$

REŠENJE:

U poglavlju 2.3.4.5. smo izveli prenosnu funkciju U-manometra sa tečnošću, i prikazali je u obliku:

$$\frac{H(s)}{\Delta p(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi s}{\omega_n} + 1}$$

gde su pojačanje, vremenska konstanta, sopstvena frekvencija i koeficijent prigušenja ovog sistema bili definisani na sledeći način:

$$\tau^2 = \frac{I}{\omega_n^2} = \frac{L}{2g}, \quad 2\xi\tau = \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{16L\mu}{\rho g D^2}, \quad K = \frac{1}{2\rho g}$$

Kao što se vidi, sopstvena frekvencija ne zavisi od fizičkih karakteristika manometarske tečnosti, tako da će biti ista u oba posmatrana slučaja:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{L}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.81}{1.93}} = 3.99 \text{ rad/s}$$

Koeficijent prigušenja i pojačanje stacionarnog stanja zavise od vrste fluida, tako da će za slučajeve (a) i (b) biti različiti, zbog čega će i odzivi manometra sa živom i manometra sa vodom biti različiti.

(a) Odziv U-manometra sa živom

Pojačanje U-manometra sa živom iznosi:

$$K_{Hg} = \frac{l}{2\rho_{Hg}g} = \frac{l}{2 \times 13600 \times 9.81} = 3.75 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{Pa}} = 3.75 \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{kPa}}$$

a koeficijent prigušenja:

$$\xi_{Hg} = \frac{8L\mu_{Hg}}{\rho_{Hg}gD^2}\omega_n = \frac{8 \times 1.23 \times 1.6 \times 10^{-3}}{13600 \times 9.81 \times (2 \times 10^{-3})^2} \times 3.99 = 0.118$$

Pošto je koeficijent prigušenja ovog U-manometra manji od 1, njegov odziv će biti nedovoljno prigušen i može se opisati jednačinom (2.7-39).

$$h(t) = A K_{Hg} \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{l - \xi_{Hg}^2}} e^{-\xi_{Hg}\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{l - \xi_{Hg}^2} t + \phi_{Hg}\right) \right)$$

Fazni ugao  $\phi$  će u ovom slučaju iznositi:

$$\phi_{Hg} = \arctg\left(\frac{\sqrt{l - \xi_{Hg}^2}}{\xi_{Hg}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{l - 0.118^2}}{0.118}\right) = 1.45 \text{ rad}$$

Vremenska promena visine žive u kraku U-manometra će biti sledeća:

$$h(t) = 10 \times 3.75 \times 10^{-3} \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{l - 0.118^2}} e^{-0.188 \times 3.99 t} \sin(3.99 \sqrt{l - 0.118^2} t + 1.45) \right)$$

$$h(t) = 0.0375(1 - 1.01 e^{-0.47 t} \sin(3.96 t + 1.45)) \text{ [m]}$$

Ova zavisnost je grafički prikazana na slici P-2.7.4(a).

Osnovni kriterijumi odziva manometra sa živom imaju sledeće vrednosti:

- period oscilovanja:

$$P = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{l - \xi_{Hg}^2}} = \frac{2\pi}{3.99 \sqrt{l - 0.118^2}} = 1.6 \text{ s}$$

- prekoračenje:

$$PR = \exp\left(-\pi \xi_{Hg} / \sqrt{l - \xi_{Hg}^2}\right) = \exp\left(-\pi \times 0.118 / \sqrt{l - 0.118^2}\right) = 0.688$$

- odnos slabljenja:

$$O.S. = PR^2 = 0.688^2 = 0.474$$

(b) Odziv U-manometra sa vodom:

U slučaju da se kao manometarska tečnost koristi voda, pojačanje U-manometra će iznositi:

$$K_{H_2O} = \frac{l}{2\rho_{H_2O}g} = \frac{l}{2 \times 1000 \times 9.81} = 5.1 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{Pa}} = 5.1 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{kPa}}$$

a koeficijent prigušenja:

$$\xi_{H_2O} = \frac{8L\mu_{H_2O}}{\rho_{H_2O}gD^2} = \frac{8 \times 1.23 \times 10^{-3}}{10^3 \times 9.81 \times (2 \times 10^{-3})^2} \times 3.99 = 1.00$$

Na osnovu vrednosti koeficijenta prigušenja zaključujemo da manometar sa vodom predstavlja kritično

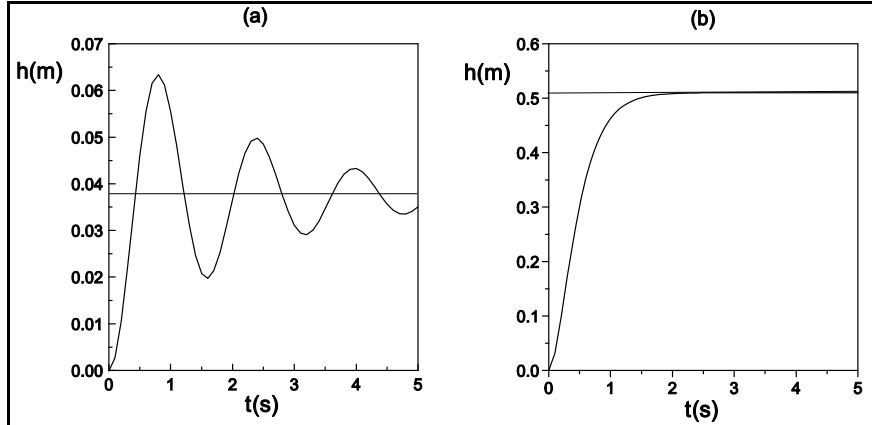


prigušen sistem, tako da se njegov vremenski odziv dobija korišćenjem jednačine (2.7-44):

$$h(t) = A K_{H_2O} (1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t})$$

$$= 0.51 (1 - (1 + 3.99 t) e^{-3.99 t}) \text{ [m]}$$

Grafički prikaz odziva U manometra sa vodom dat je na slici P-2.7.4(b).



Slika P-2.7.4. Odziv U-manometra sa tečnošću za slučaj kada se kao manometarska tečnost koristi: (a) živa; (b) voda

**PRIMER 2.7-5.** Stepenasti odziv dva nivo sistema prvog reda vezana na red bez međudejstva i sa međudejstvom

Dva rezervoara čije su površine poprečnog preseka:

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ m}^2$$

i otpornosti isticanja iz njih:

$$R_1 = 2 \text{ min/m}^2 \text{ i } R_2 = 4 \text{ min/m}^2$$

su vezana na red. Naći odziv ovog sistema (vremensku promenu visine nivoa u drugom rezervoaru) kada se ulazni protok u prvi rezervoar stepenasto promeni od  $0.2 \text{ m}^3/\text{min}$  na  $0.3 \text{ m}^3/\text{min}$ , za slučaj kada su ovi nivo sistemi vezani: (a) bez međudejstva; (b) sa međudejstvom.

REŠENJE:

(a) *Odziv sistema bez međudejstva*

U poglavlju 2.3.4. smo izveli prenosnu funkciju za rednu vezu dva nivo sistema prvog reda bez međudejstava, u sledećem obliku:

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{F_1(s)} = \frac{R_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$\tau_1$  i  $\tau_2$  su vremenske konstante prvog i drugog rezervoara, respektivno i u našem slučaju iznose:

$$\tau_1 = R_1 C_1 = 2 \times 1 = 2 \text{ min}$$

$$\tau_2 = R_2 C_2 = 4 \times 1 = 4 \text{ min}$$

Ovaj slučaj zapravo predstavlja previše prigušen sistem drugog reda kod koga su prividne vremenske konstante jednake pravim. Izraz za stepenasti odziv ovog sistema je prikazan jednačinom (2.7-50) koja se za naš slučaj svodi na oblik:

$$h_2(t) = h_{20} + A R_2 \left( I - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right)$$

Početna vrednost visine u drugom sudu  $h_{20}$  (visina pre delovanja poremećaja ulaznog protoka) se može jednostavno odrediti na osnovu vrednosti protoka u početnom stacionarnom stanju  $F_0$  i otpornost isticanja iz drugog rezervoara  $R_2$ :

$$h_{20} = F_0 R_2 = 0.2 \times 4 = 0.8 \text{ m}$$

Amplituda ulazne stepenaste promene u ovom slučaju iznosi:

$$A = F_\infty - F_0 = 0.3 - 0.2 = 0.1 \text{ m}^3 / \text{min}$$

(Indeks 0 označava vrednosti u početnom, a indeks 4 u krajnjem stacionarnom stanju.)

Zamenom brojnih vrednosti za  $h_{20}$ ,  $A$ ,  $R_2$ ,  $\tau_1$  i  $\tau_2$ , dobija se konačni izraz za odziv sistema bez međudejstva:

$$h_2(t) = 0.8 + 0.4 (1 + e^{-0.5t} - 2e^{-0.25t}) \text{ [m]}$$

### (b) Odziv sistema sa međudejstvom

Za dva nivo sistema prvog reda vezana na red sa međudejstvom smo u poglavlju 2.3.4. izveli sledeću prenosnu funkciju:

$$G(s) = \frac{H_2(s)}{F_1(s)} = \frac{R_2}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + 1}$$

Nule polinoma u imeniocu ove prenosne funkcije su realne, tako da se ova prenosna funkcija može napisati u obliku:

$$G(s) = \frac{R_2}{(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1)}$$

i nalaženje stepenastog odziva ovog sistema se svodi na prethodni slučaj (pod (a)), odnosno na odziv previše prigušenog sistema drugog reda.

$$h_2(t) = h_{20} + A R_2 \left( 1 - \frac{\tau_a}{\tau_a - \tau_b} e^{-t/\tau_a} + \frac{\tau_b}{\tau_a - \tau_b} e^{-t/\tau_b} \right)$$

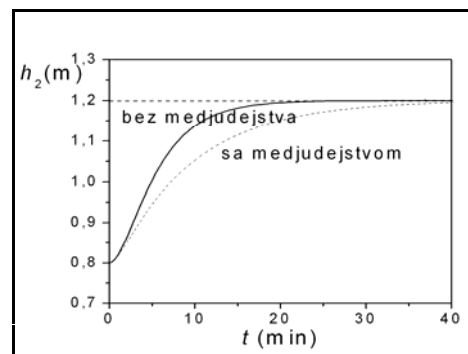
$\tau_a$  i  $\tau_b$  se nazivaju *efektivne vremenske konstante* sistema (jer se sistem sa međudejstvom može tretirati kao sistem bez međudejstva čije su vremenske konstante ove "efektivne" vrednosti, umesto "pravih" vremenskih konstanti koje predstavljaju proizvod odgovarajućih kapacitivnosti i otpornosti). Vrednosti efektivnih vremenskih konstanti se mogu jednostavno odrediti na osnovu sledećih identiteta:

$$\tau_a \tau_b \equiv R_1 C_1 R_2 C_2 = \tau_1 \tau_2$$

$$\tau_a + \tau_b \equiv R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1 = \tau_1 + \tau_2 + R_2 C_2$$

U našem slučaju će biti:

$$\left. \begin{array}{l} \tau_a \tau_b = 2 \times 4 = 8 \\ \tau_a + \tau_b = 2 + 4 + 4 \times 1 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \tau_a = 9.12 \text{ min} \\ \tau_b = 0.88 \text{ min} \end{array}$$



Slika P-2.7.5. Poređenje odziva dva nivo sistema prvog reda vezana na red bez međudejstva i sa međudejstvom

Kao što se vidi, vrednosti efektivnih vremenskih konstanti se mnogo više razlikuju nego vrednosti stvarnih vremenskih konstanti.

Početna vrednost visine  $h_{20}$  u stacionarnom stanju je ista kao i u slučaju pod (a), kao i veličina ulazne promene (treba primetiti da početna vrednost visine  $h_{10}$  u stacionarnom stanju nije ista za slučaj (a) i (b)). Odziv sistema sa međudejstvom će prema tome biti:

$$h_2(t) = 0.8 + 0.1x4 \left( 1 - \frac{9.12}{9.12 - 0.88} e^{-t/9.12} + \frac{0.88}{9.12 - 0.88} e^{-t/0.88} \right)$$

$$h_2(t) = 0.8 + 0.4(1 - 1.107 e^{-0.11t} + 0.107 e^{-1.134t}) \text{ [m]}$$

Grafički prikaz odziva ovog sistema, za slučaj (a) i (b) dat je na slici P-2.7.5. Kao što se vidi, sistem sa međudejstvom je znatno sporiji. Razlog za ovo je što ukupnu brzinu odziva složenog sistema određuje njegov najsporiji stupanj, odnosno element sa najvećom vremenskom konstantom. Kod sistema sa međudejstvom veća vremenska konstanta iznosi 9.12 min, što je znatno veće od 4 min koliko iznosi veća vremenska konstanta kod sistema bez međudejstva.

### 2.7.3. Vremenski odzivi kapacitivnog elementa

Nalaženje odziva kapacitivnog elementa, definisanog prenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{1}{Cs} \quad (2.7-64)$$

na različite promene ulazne funkcije predstavlja jednostavan problem, tako da u ovom tekstu neće biti prikazano izvođenje jednačina odziva, već će biti dati samo njihovi konačni izrazi.

#### 2.7.3.1. Stepenasti odziv kapacitivnog elementa

$$x(t) = Au(t) \Rightarrow y(t) = \frac{A}{C} t \quad (2.7-65)$$

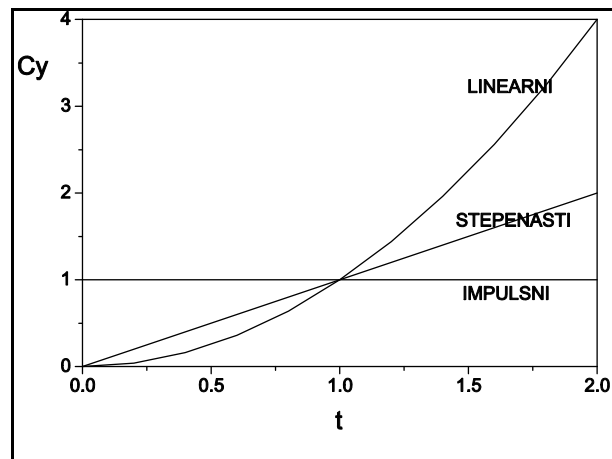
#### 2.7.3.2. Impulsni odziv kapacitivnog elementa

$$x(t) = A\delta(t) \Rightarrow y(t) = A/C \quad (2.7-66)$$

#### 2.7.3.3. Odziv kapacitivnog elementa na linearnu promenu ulaza

$$x(t) = bt \Rightarrow y(t) = \frac{b}{2C} t^2 \quad (2.7-67)$$

Grafički prikaz ovih zavisnosti (za slučaj  $A=1$  i  $b=1$ ) dat je na slici 2.7-12.



Slika 2.7-12. Odziv kapacitivnog elementa na jediničnu impulsnu, stepenastu i linearnu promenu ulaza

### 2.7.4. Vremenski odzivi diferencijalnog elementa

Idealni diferencijalni element koji smo definisali u poglavlju 2.3.6. bi pri stepenastoj i impulsnoj promeni ulaza dao beskonačno veliki izlaz. Kao što smo naveli, ovakav element nije moguće fizički realizovati. Zato ćemo dati pregled vremenskih odziva realnog diferencijalnog elementa koji se može opisati prenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1}$$

kod koje je vremenska konstanta  $\tau_1$  mnogo veća od vremenske konstante  $\tau_2$ .

Primenom Laplasove i inverzne Laplasove transformacije se jednostavno dobijaju izrazi za odzive ovog sistema na različite ulaze.

#### 2.7.4.1. Stepenasti odziv realnog diferencijalnog elementa

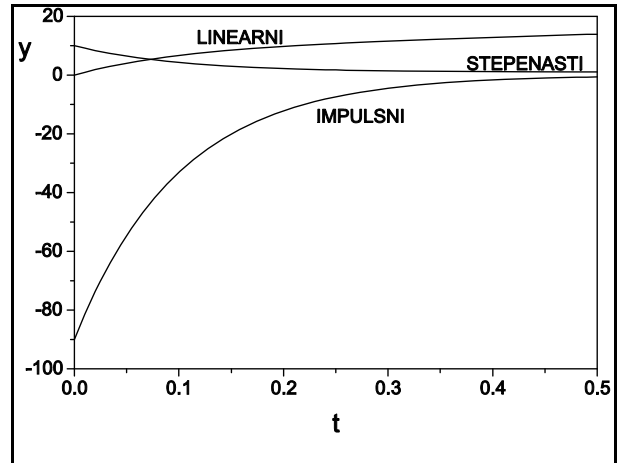
$$x(t) = A u(t) \Rightarrow y(t) = A \left( I + \left( \frac{\tau_1}{\tau_2} - I \right) e^{-t/\tau_2} \right) \quad (2.7-69)$$

#### 2.7.4.2. Impulsni odziv realnog diferencijalnog elementa

$$x(t) = A \delta(t) \Rightarrow y(t) = A \frac{\tau_1}{\tau_2} \delta(t) + \frac{A}{\tau_2} \left( I - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) e^{-t/\tau_2} \quad (2.7-70)$$

#### 2.7.4.3. Odziv realnog diferencijalnog elementa na linearnu promenu ulaza

$$x(t) = bt \Rightarrow y(t) = b \tau_2 + b(\tau_1 - \tau_2)(I - e^{-t/\tau_2}) \quad (2.7-71)$$



Slika 2.7-13. Odziv realnog diferencijalnog elementa na stepenastu, impulsnu i linearnu promenu ulaza

Na slici 2.7-13. su prikazani odzivi realnog diferencijalnog elementa koji odgovaraju vrednostima vremenskih konstanti  $\tau_1=1$  i  $\tau_2=0.1$  na jediničnu stepenastu, jediničnu impulsnu i linearnu promenu ulaza sa koeficijentom pravca  $b=10$ .

### 2.7.5. Vremenski odzivi serije više sistema prvog reda

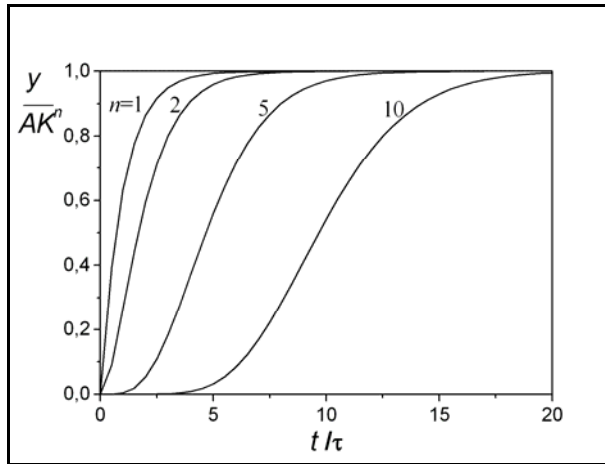
Kao što smo već naveli, procesi koji predstavljaju rednu vezu (kaskadu) više sistema prvog reda se dosta često javljaju u postrojenjima procesne industrije. Pored toga, kaskada sistema prvog reda se često koristi kao aproksimacija sistema sa raspoređenim parametrima. Opšti izrazi za vremenske odzive serije sistema prvog reda se mogu relativno jednostavno izvesti za slučaj kada su svi elementi u seriji identični, odnosno kada se kaskada može prikazati prenosnom funkcijom:

$$G_n(s) = \frac{Y_n(s)}{X(s)} = \frac{K^n}{(\tau s + I)^n} \quad (2.7-72)$$

Nećemo prikazivati postupak nalaženja inverzne Laplasove transformacije, već samo rezultate koji se dobijaju za odzive ovog sistema na različite standardne promene ulaza.

#### 2.7.5.1. Stepenasti odziv serije od n stupnjeva

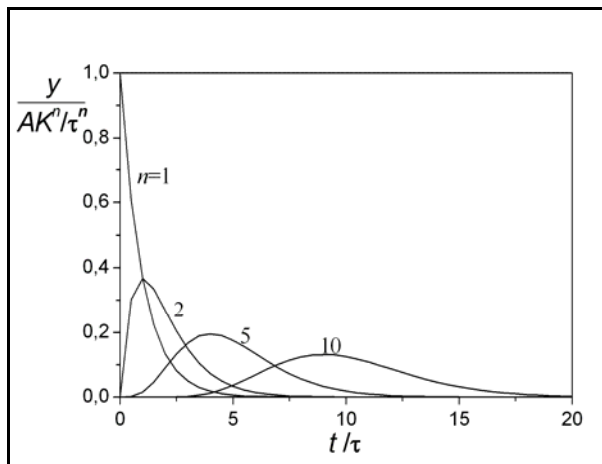
$$x(t) = A u(t) \Rightarrow y_n(t) = AK^n \left\{ I - e^{-t/\tau} \left[ I + \frac{t}{\tau} + \frac{I}{2!} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 + \dots + \frac{I}{(n-1)!} \left( \frac{t}{\tau} \right)^{n-1} \right] \right\} \quad (2.7-73)$$



Slika 2.7-14. Stepentasti odziv serije identičnih sistema prvog reda za različite vrednosti broja stupnjeva u seriji  $n$

### 2.7.5.2. Impulsni odziv serije od $n$ stupnjeva

$$x(t) = A \delta(t) \Rightarrow y_n(t) = \frac{AK^n}{\tau^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-t/\tau} \quad (2.7-74)$$



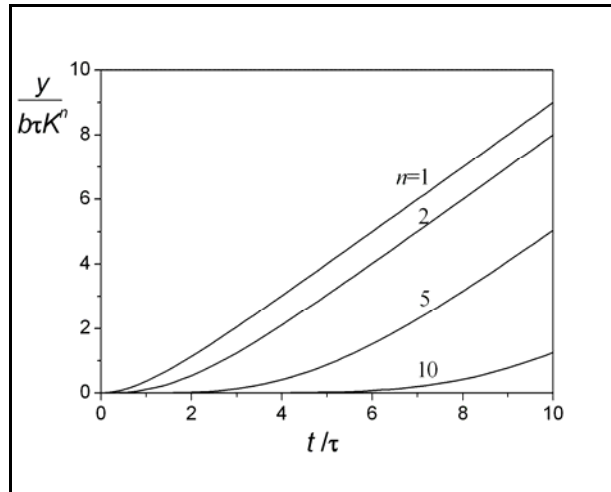
Slika 2.7-15. Impulsni odziv serije identičnih sistema prvog reda za različite vrednosti broja stupnjeva u seriji  $n$

### 2.7.5.3. Odziv serije od $n$ stupnjeva na linearnu promenu ulaza

$$x(t) = bt \Rightarrow y(t) = bK^n (t - n\tau) + bK^n \tau \left[ \frac{1}{(n-1)!} \frac{t^{n-1}}{\tau^{n-1}} + \frac{2}{(n-2)!} \frac{t^{n-2}}{\tau^{n-2}} + \frac{3}{(n-3)!} \frac{t^{n-3}}{\tau^{n-3}} + \dots + n \right] e^{-t/\tau} \quad (2.7-75)$$

Odzivi kaskade od  $n$  identičnih sistema prvog reda, za različite vrednosti broja stupnjeva u seriji  $n$  su prikazani na slikama 2.7-14. (stepenasti), 2.7-15. (impulsni) i 2.7-16. (linearni). Ove slike pokazuju da, pri velikim vrednostima broja stupnjeva u kaskadi  $n$ , odziv pokazuje karakteristike koje liče na čisto kašnjenje. Na taj način se sistemi sa raspoređenim parametrima koji, kako smo pokazali u poglavlju 2.5.2., pokazuju efekat mrtvog vremena, mogu aproksimirati kaskadom velikog broja sistema sa nagomilanim parametrima.

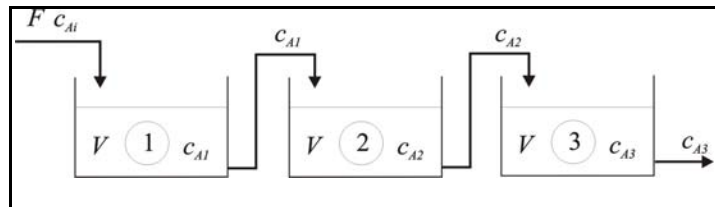
Odziv serije sistema prvog reda ćemo ilustrirati na primeru kaskade od tri izotermna protočna reaktora sa idealnim mešanjem.



Slika 2.7-16. Odziv serije identičnih sistema prvog reda na linearnu promenu ulaza za različite vrednosti broja stupnjeva u seriji  $n$

**PRIMER 2.7-6.** Stepenasti odziv kaskade od tri identična izotermna reaktora sa idealnim mešanjem

Da bi se povećao stepen reagovanja u reaktoru prikazanom u primeru 2.7-1., umesto jednog, upotrebiće se kaskada od tri identična izotermna reaktora sa idealnim mešanjem i konstantnom zapreminom i protokom, prikazana na slici P-2.7.6-1. Treba naći vremensku promenu koncentracije u prvom, drugom i trećem reaktoru u nizu, ako se ulazna koncentracija u prvi reaktor stepenasto promeni od 0.4 na 1 mol/m<sup>3</sup>. Fizički parametri reaktora su isti kao u primeru 2.7-1:  $V=0.5$  m<sup>3</sup>,  $F=0.25$  m<sup>3</sup>/min ( $\tau_c=2$  min),  $k=0.5$  min<sup>-1</sup>.



Slika P-2.7.6-1. Kaskada od tri izotermna reaktora sa idealnim mešanjem

REŠENJE:

Prvo ćemo definisati vrednosti koncentracija u sva tri reaktora u početnom stacionarnom stanju (pri ulaznoj koncentraciji u prvi reaktor od 0.4 mol/m<sup>3</sup>). Za svaki reaktor važi zavisnost između izlazne i ulazne koncentracije koju smo definisali u primeru 2.7-1. (jednačina (P-2.7.1-2)):

$$c_{A,s} = \frac{1}{1+k\tau_c} c_{A_i,s} = \frac{1}{1+0.5 \times 2} c_{A_i,s} = \frac{1}{2} c_{A_i,s}$$

Na osnovu ove zavisnosti, dobijaju se sledeće vrednosti koncentracija u prvom, drugom i trećem reaktoru u početnom stacionarnom stanju:

$$c_{A10} = 0.2 \text{ mol/m}^3, \quad c_{A20} = 0.1 \text{ mol/m}^3, \quad c_{A30} = 0.05 \text{ mol/m}^3$$

Prenosna funkcija svakog reaktora ponaosob identična je sa onom dobijenom u primeru 2.7-1:

$$\frac{C_{A1}(s)}{C_{A_i}(s)} = \frac{C_{A2}(s)}{C_{A1}(s)} = \frac{C_{A3}(s)}{C_{A2}(s)} = \frac{K}{\tau_s + 1} = \frac{0.5}{s + 1}$$

Odziv prvog, drugog i trećeg reaktora na definisanu promenu ulazne koncentracije u prvi reaktor:

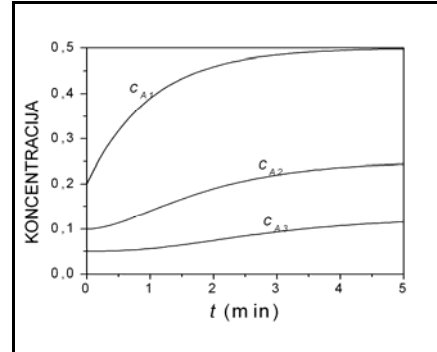
$$C_{A_i}(s) = \frac{A}{s} = \frac{0.6}{s}$$

može se dobiti na osnovu jednačine (2.7-73), za  $n=1, 2$  i  $3$ . Pri tome treba primetiti da je izraz za odziv prvog reaktora identičan sa onim dobijenim u Primeru 2.7-1. (za sistem prvog reda), dok je izraz za odziv drugog reaktora predstavlja odziv kritično prigušenog sistema drugog reda. Dobijaju se sledeće vremenske zavisnosti promene koncentracije u prvom, drugom i trećem reaktoru:

$$c_{A1}(t) = c_{A10} + AK(1 - e^{-t/\tau}) \\ = 0.2 + 0.3(1 - e^{-t})$$

$$c_{A2}(t) = c_{A20} + AK^2 \left[ 1 - e^{-t/\tau} \left[ 1 + \frac{t}{\tau} \right] \right] \\ = 0.1 + 0.15(1 - e^{-t}(1+t))$$

$$c_{A3}(t) = c_{A30} + AK^3 \left[ 1 - e^{-t/\tau} \left( 1 + \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 \right) \right] \\ = 0.05 + 0.075(1 - e^{-t}(1+t+t^2/2))$$



Slika P-2.7.6-2. Vremenska promena koncentracije u prvom, drugom i trećem reaktoru

Grafički prikaz ovih zavisnosti dat je na slici P-2.7.6-2.

## 2.8. DINAMIKA SISTEMA U FREKVENTNOM DOMENU

Do sada smo prikazali dva načina na koje se mogu definisati dinamički modeli sistema: u obliku jedne ili sistema diferencijalnih jednačina (u vremenskom domenu) ili u obliku prenosnih funkcija (u Laplasovom domenu). Treći način prikazivanja dinamike sistema se zasniva na analizi frekventnog odziva sistema i nazivamo ga *frekventnim domenom*. Kao što ćemo pokazati, ovaj način prikazivanja dinamike sistema može biti vrlo pogodan i koristan, jer se dinamički modeli složenih sistema dobijaju jednostavno iz dinamičkih modela njihovih jednostavnih elemenata, primenom najjednostavnijeg računa sa kompleksnim brojevima.

Kao i kod Laplasovog domena, korišćenje frekventnog domena je ograničeno na linearne sisteme.

### 2.8.1. Definicije modela u frekventnom domenu

U poglavlju 2.7.1.4. smo izveli izraz za odziv sistema prvog reda na sinusnu promenu ulaza:

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

Kao rezultat smo dobili izraz koji se sastoji od jednog eksponencijalnog i jednog sinusnog člana:

$$y(t) = \frac{KA\tau\omega}{I + \tau^2\omega^2} e^{-t/\tau} + \frac{KA}{\sqrt{I + \tau^2\omega^2}} \sin(\omega t + \arctan(-\tau\omega)) \quad (2.8-1)$$

Posle dovoljno dugog vremena (praktično posle oko pet vremenskih konstanti), eksponencijalni član u odzivu postaje zanemarljivo mali i na se izlazu dobija sinusna funkcija, čija je frekvencija identična sa frekvencijom ulaza, ali koja ima manju amplitudu i fazno je pomerena u odnosu na ulaz. Ovaj kvazistacionarni odziv se, za jedinično pojačanje sistema, može prikazati sledećom funkcijom:

$$y_{ks}(t) = \frac{A}{\sqrt{I + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t + \arctan(-\omega\tau)) \quad (2.8-2)$$

Analogan rezultat se dobija za bilo koji linearni stabilan sistem. Kvazistacionarni odziv sistema na sinusnu promenu ulaza naziva se *frekventni odziv* i za svaki sistem je definisan sa dve funkcije

frekvencije:

- odnosom amplituda izlaza i ulaza koji se naziva *amplitudna karakteristika*, i za sistem prvog reda je sledeća funkcija frekvencije ulazne promene:

$$AR(\omega) = \frac{I}{\sqrt{I + \omega^2 \tau^2}} \quad (2.8-3)$$

- faznom razlikom između izlaza i ulaza koja se naziva *fazna karakteristika*, i za sistem prvog reda se definiše na sledeći način:

$$\phi = \arctan(\omega\tau) = -\arctan(\omega\tau) \quad (2.8-4)$$

Par funkcija kojima su definisane amplitudna i fazna karakteristika, naziva se *amplitudno-fazna karakteristika* ili *frekventna karakteristika sistema*.

Frekventna karakteristika sistema se često prikazuje u obliku kompleksne funkcije frekvencije čiji je moduo identičan sa amplitudnom karakteristikom, a argument sa faznom karakteristikom sistema:

$$G(j\omega) = AR(\omega) e^{j\phi(\omega)} \quad (2.8-5)$$

odnosno:

$$|G(j\omega)| = AR(\omega), \quad \arg(G(j\omega)) = \phi(\omega) \quad (2.8-6)$$

Ovako definisana funkcija  $G(j\omega)$  naziva se *frekventna prenosna funkcija sistema*.

### 2.8.2. Dobijanje frekventnih karakteristika - osnovna teorema

Već na primeru odziva jednostavnog sistema prvog reda, može se zaključiti da je nalaženje frekventnih karakteristika sistema po definiciji (nalaženjem vremenskog odziva na sinusnu promenu ulaza u vremenskom domenu, i traženjem amplitude i faze kvazistacionarnog odziva) prilično komplikovano. Srećom, frekventne karakteristike linearnih sistema se mogu dobiti vrlo jednostavno, primenom sledeće teoreme:

**OSNOVNA TEOREMA:** *Ako se u prenosnoj funkciji sistema Laplasova kompleksna promenljiva  $s$  zameni sa  $j\omega$  (gde je  $j$  imaginarna jedinica i  $\omega$  frekvencija), dobija se kompleksna funkcija čiji je moduo identičan sa amplitudnom, a argument sa faznom karakteristikom tog sistema, odnosno, dobija se frekventna prenosna funkcija sistema.*

Treba naglasiti da ova teorema važi *samo za stabilne sisteme*. Frekventne karakteristike nestabilnih sistema nema smisla definisati, jer će odziv nestabilnog sistema na sinusni ulaz biti beskonačan. Takođe treba naglasiti da se frekventne karakteristike, kao i prenosna funkcija, definišu *samo za linearne sisteme*.

DOKAZ TEOREME:

Posmatraćemo odziv linearnog sistema sa nagomilanim parametrima definisanog sledećom prenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{Z(s)}{P(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)} \quad (2.8-7)$$

na sinusnu promenu ulaza:

$$x(t) = A \sin(\omega t) \Rightarrow X(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2.8-8)$$

Laplasova transformacija izlaza će biti:

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s) = \frac{A\omega G(s)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{A\omega Z(s)}{(s + j\omega)(s - j\omega)(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)} \quad (2.8-9)$$

Izraz na desnoj strani jednačine (2.8-9) se može razviti u zbir parcijalnih razlomaka, na sledeći način:



$$Y(s) = \frac{B}{s + j\omega} + \frac{C}{s - j\omega} + \frac{D_1}{s - p_1} + \dots + \frac{D_n}{s - p_n} \quad (2.8-10)$$

Koeficijenti  $B, C, D_1, \dots, D_n$ , se određuju na način opisan u poglavlju 2.2.1.4:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{s \rightarrow j\omega} [(s + j\omega)Y(s)] = \lim_{s \rightarrow j\omega} \left[ \frac{A\omega G(s)}{s - j\omega} \right] = -\frac{A}{2j} G(j\omega) \\ C &= \lim_{s \rightarrow -j\omega} [(s - j\omega)Y(s)] = \lim_{s \rightarrow -j\omega} \left[ \frac{A\omega G(s)}{s + j\omega} \right] = \frac{A}{2j} G(j\omega) \\ D_1 &= \lim_{s \rightarrow p_1} [(s - p_1)Y(s)] \\ &\vdots \\ D_n &= \lim_{s \rightarrow p_n} [(s - p_n)Y(s)] \end{aligned} \quad (2.8-11)$$

Zamenom ovih izraza u jednačinu (2.8-9) i nalaženjem inverzne Laplasove transformacije, dobija se sledeći izraz za odziv sistema čija je prenosna funkcija  $G(s)$ , na sinusnu promenu ulaza:

$$y(t) = \left( \frac{-A}{2j} G(j\omega) \right) e^{-j\omega t} + \left( \frac{A}{2j} G(j\omega) \right) e^{j\omega t} + \sum_{j=1}^n D_j e^{p_j t} \quad (2.8-12)$$

Kvazistacionarni, frekventni odziv sistema se dobija kada  $t$  teži beskonačnosti. Uslov da se dobije kvazistacionarni odziv je da je sistem stabilan, jer će u suprotnom odziv težiti beskonačnosti kada  $t \rightarrow \infty$ . Da bi ovaj uslov bio zadovoljen, svi polovi sistema  $p_j$  moraju da budu negativni ili da imaju negativne realne delove, jer bi u suprotnom suma na desnoj strani jednačine (2.8-12) postala beskonačno velika. Sa druge strane, ako je ovaj uslov ispunjen, svi članovi sume teže nuli kada  $t \rightarrow \infty$ , tako da je kvazistacionarni odziv:

$$y_{ks}(t) = \frac{A}{2j} (G(j\omega) e^{j\omega t} - G(-j\omega) e^{-j\omega t}) \quad (2.8-13)$$

Ako se kompleksne funkcije  $G(j\omega)$  i  $G(-j\omega)$  napišu u polarnom obliku:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= |G(j\omega)| e^{j \arg(G(j\omega))} \\ G(-j\omega) &= |G(-j\omega)| e^{j \arg(G(-j\omega))} = |G(j\omega)| e^{-j \arg(G(j\omega))} \end{aligned}$$

jednačina (2.8-13) postaje:

$$y_{ks}(t) = A |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \arg(G(j\omega)))} - e^{-j(\omega t + \arg(G(j\omega)))}}{2j} \quad (2.8-14)$$

odnosno:

$$\frac{y_{ks}(t)}{A} = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg(G(j\omega))) \quad (2.8-15)$$

Kao što se vidi iz jednačine (2.8-15), amplitudna karakteristika sistema čija je prenosna funkcija  $G(s)$  je jednaka modulu, a fazna karakteristika argumentu kompleksne funkcije  $G(j\omega)$  dobijene zamenom  $s$  sa  $j\omega$  u prenosnoj funkciji sistema. Ovim je teorema dokazana.

Ako se osnovna teorema primeni na definiciju Laplasove transformacije:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \xrightarrow{s \rightarrow j\omega} F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (2.8-16)$$

dobija se rezultat da se frekventna prenosna funkcija može dobiti pomoću linearne transformacije definisane drugim integralom, koja se naziva *Furijeova (Fourier) transformacija*.

PRIMER 2.8-1. Dobijanje frekventne karakteristike sistema prvog reda primenom osnovne teoreme o zameni s sa  $j\omega$

Ako u prenosnoj funkciji sistema prvog reda:

$$G(s) = \frac{I}{\tau s + I}$$

zamenimo s sa  $j\omega$ , dobijamo kompleksnu funkciju od  $\omega$ :

$$G(j\omega) = \frac{I}{\omega\tau j + I} \quad (\text{P-2.8.1-1})$$

koja se racionalizacijom može svesti na uobičajeni algebarski oblik:

$$G(j\omega) = \frac{I - \omega\tau j}{(I + \omega\tau j)(I - \omega\tau j)} = \frac{I - \omega\tau j}{I + \omega^2\tau^2} = \frac{I}{I + \omega^2\tau^2} + \frac{-\omega\tau}{I + \omega^2\tau^2} j$$

iz koga se dobijaju realni i imaginarni deo:

$$\text{Re}(G(j\omega)) = \frac{1}{1 + \tau^2\omega^2}, \quad \text{Im}(G(j\omega)) = -\frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} \quad (\text{P-2.8.1-2})$$

Amplitudna i fazna karakteristika se dobijaju kao moduo i argument kompleksne prenosne funkcije  $G(j\omega)$ :

$$AR(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{(\text{Re}(G(j\omega)))^2 + (\text{Im}(G(j\omega)))^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \quad (\text{P-2.8.1-3})$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))}\right) = \arctan\left(\frac{-\tau\omega/(1 + \tau^2\omega^2)}{1/(1 + \tau^2\omega^2)}\right) = -\arctan(\tau\omega) \quad (\text{P-2.8.1-4})$$

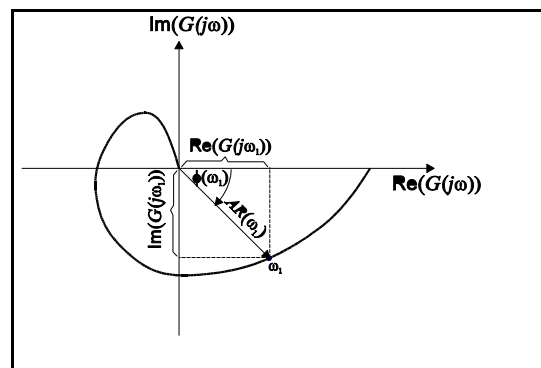
Ovi izrazi za amplitudnu i faznu karakteristiku su, naravno, identični sa onim dobijenim na osnovu definicije, nalaženjem kvazistacionarnog odziva sistema prvog reda na sinusnu promenu ulaza u vremenskom domenu.

### 2.8.3. Grafičko prikazivanje frekventnih karakteristika

U analizi i sintezi linearnih sistema upravljanja se vrlo često primenjuje grafičko prikazivanje frekventnih karakteristika. Tri najčešće korišćena dijagrama koji se koriste za grafičko prikazivanje frekventnih, odnosno amplitudno-faznih karakteristika su Nikvistov (Nyquist) dijagram, Bodeovi (Bode) dijagrami i Nikolsov (Nichols) dijagram.

#### 2.8.3.1. Nikvistov dijagram

Nikvistov dijagram, koji se često naziva i *hodograf vektora*  $G(j\omega)$  ili dijagram u  $G$ -ravni, se dobija crtanjem kompleksne funkcije  $G(j\omega)$  u pravouglom Dekar-tovom koordinatnom sistemu, u kome se na apscisi nanosi realni deo  $G(j\omega)$ , a na ordinati imaginarni deo  $G(j\omega)$ . Ako se ovaj dijagram posmatra u polarnom koordinatnom sistemu, onda poteg predstavlja amplitudnu karakteristiku (moduo frekventne prenosne funkcije  $G(j\omega)$ ), dok polarni ugao predstavlja faznu karakteristiku (argument fekvent-ne prenosne funkcije  $G(j\omega)$ ).



Slika 2.8-1. Primer Nikvistovog dijagrama

Realni i imaginarni deo frekventne prenosne funkcije se mogu jednostavno dobiti ako su poznate amplitudna i

fazna karakteristika:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(G(j\omega)) &= AR(\omega) \cos(\phi(\omega)) \\ \operatorname{Im}(G(j\omega)) &= AR(\omega) \sin(\phi(\omega)) \end{aligned} \quad (2.8-17)$$

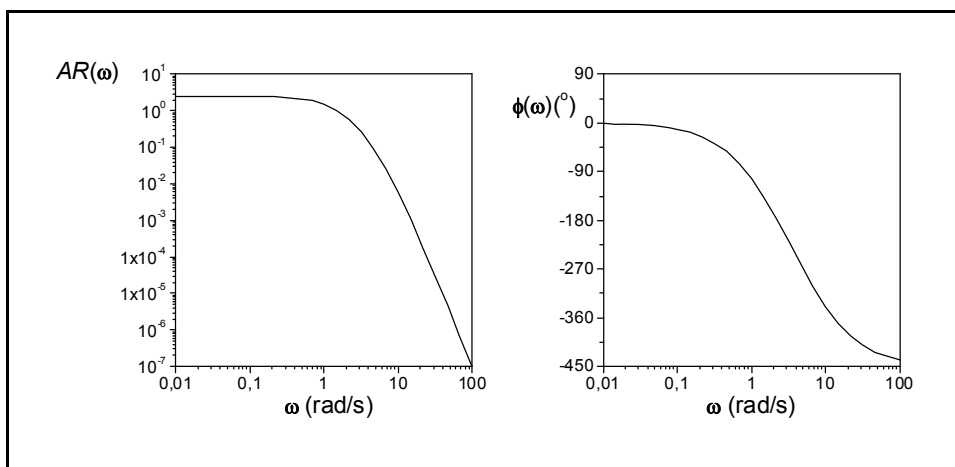
i obrnuto:

$$\begin{aligned} AR(\omega) &= \sqrt{(\operatorname{Re}(G(j\omega)))^2 + (\operatorname{Im}(G(j\omega)))^2} \\ \phi(\omega) &= \arctan \frac{\operatorname{Im}(G(j\omega))}{\operatorname{Re}(G(j\omega))} \end{aligned} \quad (2.8-18)$$

Nikvistov dijagram se crta za vrednosti frekvencije od 0 do  $\infty$ , tako što svakoj frekvenciji odgovara jedna tačka u dijagramu. Na osnovu Nikvistovog dijagrama se može sagledati veza između realnog i imaginarnog dela, odnosno između amplitudne i fazne karakteristike sistema, ali on nije pogodan za nalaženje ovih zavisnosti od frekvencije. Tipičan izgled Nikvistovog dijagrama, dat je na slici 2.8-1.

### 2.8.3.2. Bodeovi dijagrami

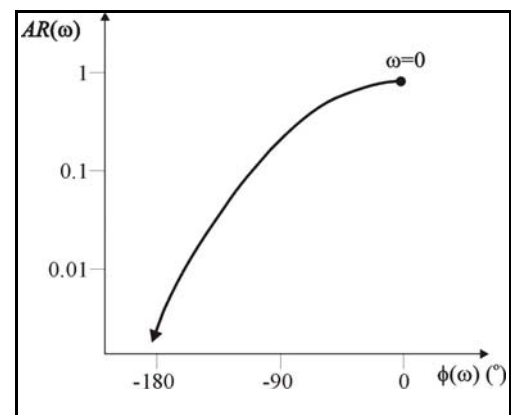
Bodeovi dijagrami daju grafički prikaz zavisnosti amplitudne i fazne karakteristike od frekvencije, i najčešće se crtaju u paru. Frekvencija se nanosi na apsisi i jednog i drugog dijagrama, i to u logaritamskoj podeli, čime se povećava opseg. Jedan od dijagrama na ordinati prikazuje amplitudnu karakteristiku, i to takođe u logaritamskoj podeli, dok drugi daje faznu karakteristiku, u linearnoj podeli. Često se, umesto pravih vrednosti amplitudne karakteristike, prikazuju njene vrednosti izražene u decibelima ( $AR(\text{db}) = 20 \log(AR)$ ). Sa Bodeovih dijagrama je vrlo lako naći amplitudnu i faznu karakteristiku za određenu vrednost frekvencije, i obrnuto. Tipičan primer Bodeovih dijagrama je dat na slici 2.8-2.



Slika 2.8-2. Primer Bodeovih dijagrama

### 2.8.3.3. Nikolsov dijagram

Nikolsov dijagram, koji se nešto ređe koristi, kao i Nikvistov dijagram daje direktnu zavisnost između amplitudne i fazne karakteristike, pri čemu se dobija kriva čija svaka tačka odgovara jednoj vrednosti frekvencije. Razlika u odnosu na Nikvistov dijagram je što se u ovom slučaju zavisnost fazna-amplitudna karakteristika prikazuje u Dekartovom pravouglom koordinativnom sistemu, tako da se na apsisci nanose vrednosti fazne karakteristike, u linearnoj podeli, a na ordinati odgovarajuće vrednosti amplitudne karakteristike, u logaritamskoj podeli ili u decibelima. Tipičan izgled Nikolsovog dijagrama dat je na slici 2.8-3.



Slika 2.8-3. Primer Nikolsovog dijagrama

### 2.8.4. Frekventne karakteristike elementarnih sistema

U ovom poglavlju ćemo izvesti izraze za frekventne karakteristike (amplitudnu i faznu karakteristiku) elementarnih sistema čije smo prenosne funkcije izveli u poglavlju 2.3., i prikazaćemo ih u Bodeovim, Nikvistovom i Nikolsovom dijagramu. Za dobijanje izraza za frekventne karakteristike, iskoristićemo osnovnu teoremu koju smo dali u poglavlju 2.8.2. Redosled navođenja frekventnih karakteristika elementarnih sistema je odabran tako da se ide od jednostavnijih ka komplikovanijim slučajevima za grafičko predstavljanje.

#### 2.8.4.1. Frekventne karakteristike proporcionalnog elementa

Pošto je prenosna funkcija proporcionalnog elementa konstanta, i njegova frekventna prenosna funkcija će biti jednaka istoj konstanti:

$$G(j\omega) = K \quad (2.8-19)$$

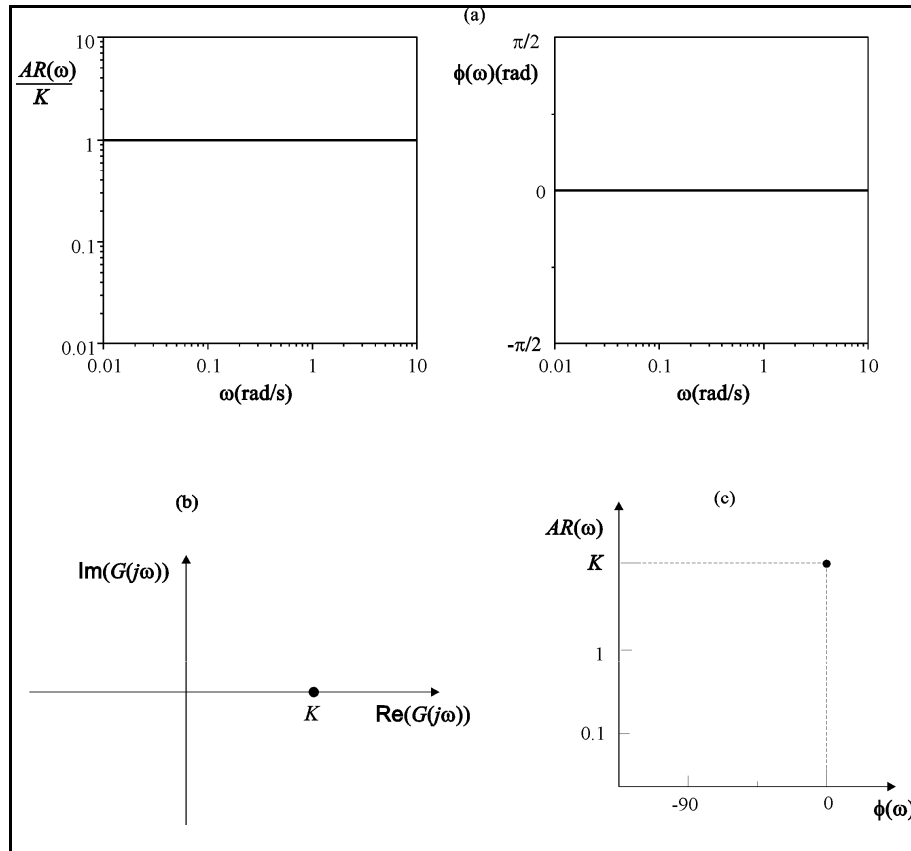
Realni i imaginarni deo ove funkcije su:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = K, \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0 \quad (2.8-20)$$

a odgovarajuća amplitudna i fazna karakteristika:

$$AR(\omega) = K, \quad \phi(\omega) = 0 \quad (2.8-21)$$

Bodeovi, Nikvistov i Nikolsov dijagram za ovaj sistem su vrlo jednostavni, i prikazani su na slici 2.8-4. Kao što se vidi Bodeovi dijagrami proporcionalnog elementa se dobijaju u obliku pravih  $AR=K$  i  $\phi=0$  koje su paralelne sa apscisom (slika 2.8-4(a)), Nikvistov dijagram se svodi na tačku  $(0,K)$  koja se nalazi na realnoj osi (slika 2.8-4(b)). Nikolsov dijagram se takođe svodi na tačku  $(0,K)$  (slika 2.8-4(c)).



Slika 2.8-4. Frekventne karakteristike proporcionalnog elementa: (a) Bodeovi dijagrami; (b) Nikvistov dijagram; (c) Nikolsov dijagram

## 2.8.4.2. Frekventne karakteristike kapacitivnog elementa

Kada se u prenosnoj funkciji kojom je definisan kapacitivni element:

$$G(s) = \frac{1}{Cs}$$

izvrši zamena  $s$  sa  $j\omega$ , dobija se sledeća kompleksna funkcija frekvencije kojom je definisana frekventna prenosna funkcija:

$$G(j\omega) = \frac{1}{C\omega j} = -\frac{1}{C\omega} j \quad (2.8-22)$$

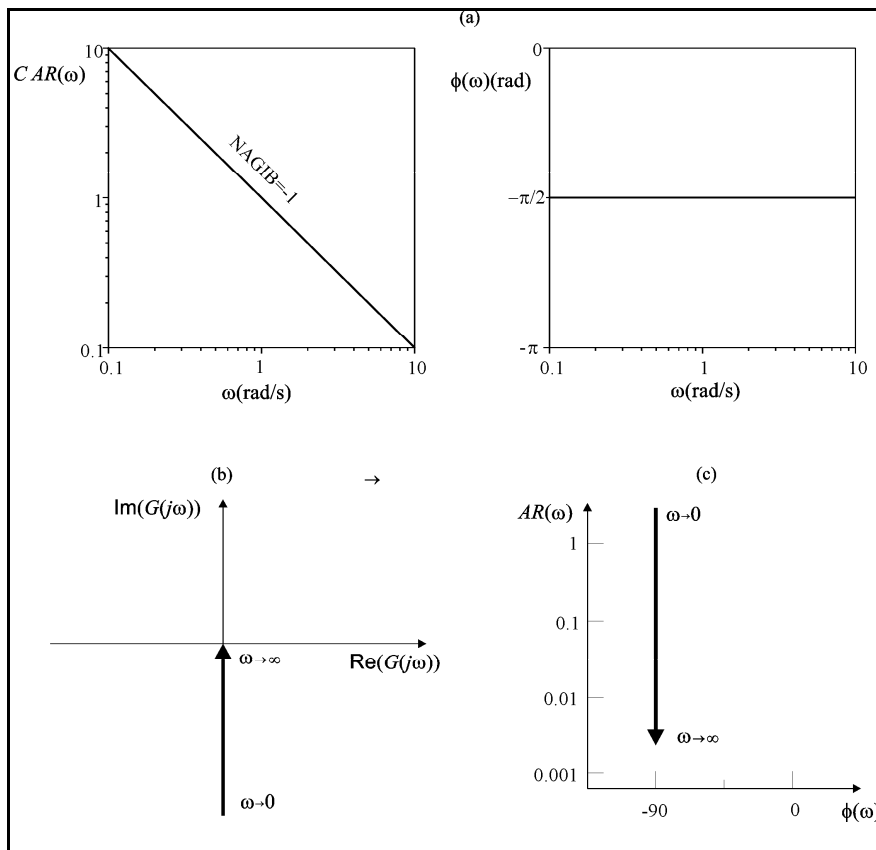
Realni i imaginarni deo ove funkcije su:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0, \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = -\frac{1}{C\omega} \quad (2.8-23)$$

a odgovarajuća amplitudna i fazna karakteristika:

$$AR(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re}(G(j\omega)))^2 + (\operatorname{Im}(G(j\omega)))^2} = \frac{1}{C\omega} \quad (2.8-24)$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(G(j\omega))}{\operatorname{Re}(G(j\omega))}\right) = \arctan\left(\frac{-1/C\omega}{0}\right) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \quad (2.8-25)$$



Slika 2.8-5. Frekventne karakteristike kapacitivnog elementa: (a) Bodeovi dijagrami; (b) Nikvistov dijagram; (c) Nikolsov dijagram

Na slici 2.8-5. su prikazani Bodeovi, Nikvistov i Nikolsov dijagram za kapacitivni element.

Kao što se vidi, Nikvistov dijagram kapacitivnog elementa u potpunosti leži na negativnom delu Im-ose, dok se Nikolsov dijagram dobija u obliku prave paralelne sa ordinatom, jer je fazna karakteristika ovog elementa konstanta i jednaka  $-\pi/2$ . Kao rezultat toga, Bodeov dijagram fazne karakteristike se dobija u obliku prave paralelne sa apscisom. Zavisnost amplitudne karakteristike od frekvencije (jednačina (2.8-24)) je hiperbola. Međutim, pošto se amplitudna karakteristika u Bodeovom dijagramu prikazuje u logaritamskom koordinatnom sistemu, dijagram se dobija u obliku prave koja prolazi kroz tačku ( $\omega=1$ ,  $AR=1/C$ ) i čiji je koeficijent pravca jednak  $-1$ .

#### 2.8.4.3. Frekventne karakteristike elementa sa mrtvim vremenom

Kada se u prenosnoj funkciji kojom se definiše element sa mrtvim vremenom:

$$G(s) = e^{-Ds}$$

izvrši zamena  $s$  sa  $j\omega$ , dobija se frekventna prenosna funkcija u eksponencijalnom obliku:

$$G(j\omega) = e^{-D\omega j} \quad (2.8-26)$$

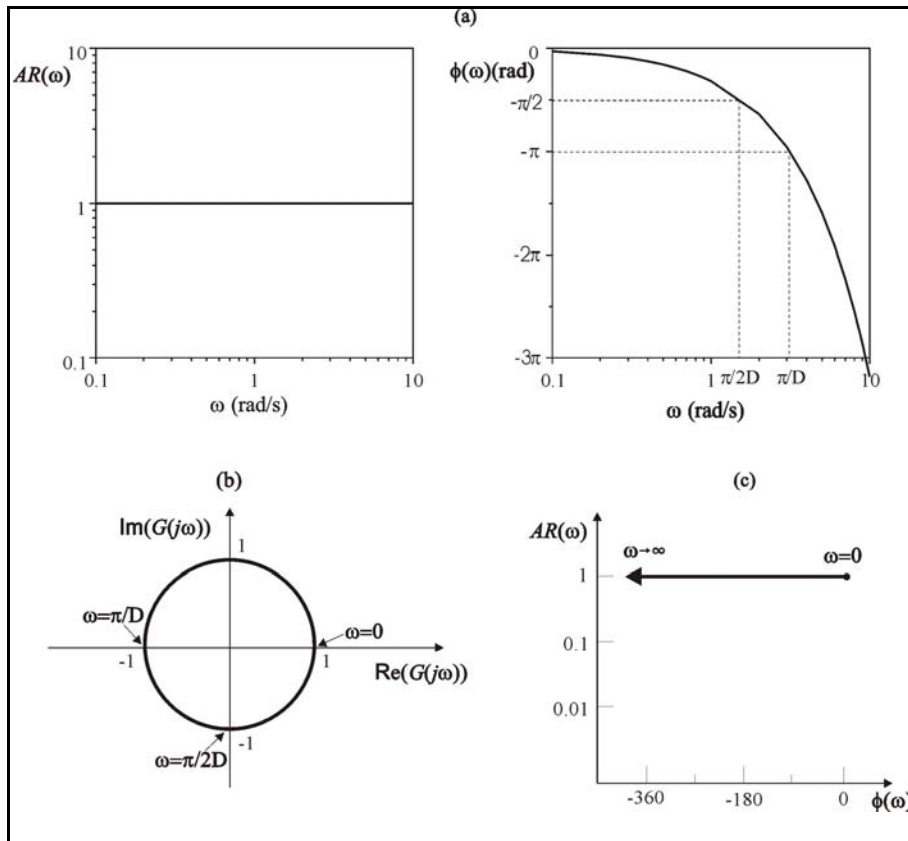
iz koga se direktno mogu sagledati izrazi za amplitudnu i faznu karakteristiku:

$$AR(\omega) = 1 \quad (2.8-27)$$

$$\phi(\omega) = -D\omega \quad (2.8-28)$$

Treba naglasiti da je fazna karakteristika elementa sa mrtvim vremenom definisana jednačinom (2.8-28) izražena u *radijanima*.

Na slici 2.8-6. su prikazani Bodeovi, Nikvistov i Nikolsov dijagram za element sa mrtvim vremenom. Pošto je amplitudna karakteristika elementa sa mrtvim vremenom jednaka jedinici za svako  $\omega$ , dok fazna karakteristika uzima vrednosti od 0 do  $-4$ , Bodeov dijagram amplitudne karakteristike se svodi na horizontalnu pravu  $AR=1$ , dok se linearni izraz za faznu karakteristiku (jednačina (2.8-28)) zbog semilogaritamske podele na osama transformiše u opadajuću eksponencijalnu funkciju, koja se za male frekvencije asimptotski približava pravoj  $\phi=0$ . Nikvistov dijagram se dobija u obliku beskonačno mnogo krugova sa centrom u koordinatnom početku i sa jediničnim poluprečnikom, koji se međusobno poklapaju.



Slika 2.8.6. Frekventne karakteristike elementa sa mrtvim vremenom: (a) Bodeovi dijagrami (za  $D=1$ ); (b) Nikvistov dijagram; (c) Nikolsov dijagram

#### 2.8.4.4. Frekventne karakteristike sistema prvog reda

Izraze za frekventne karakteristike sistema prvog reda smo izveli u primeru 2.8-1. (i prethodno u poglavlju 2.7-1.4., po definiciji). Pri tome smo dobili sledeće izraze za realni i imaginarni deo frekventne karakteristike sistema prvog reda:

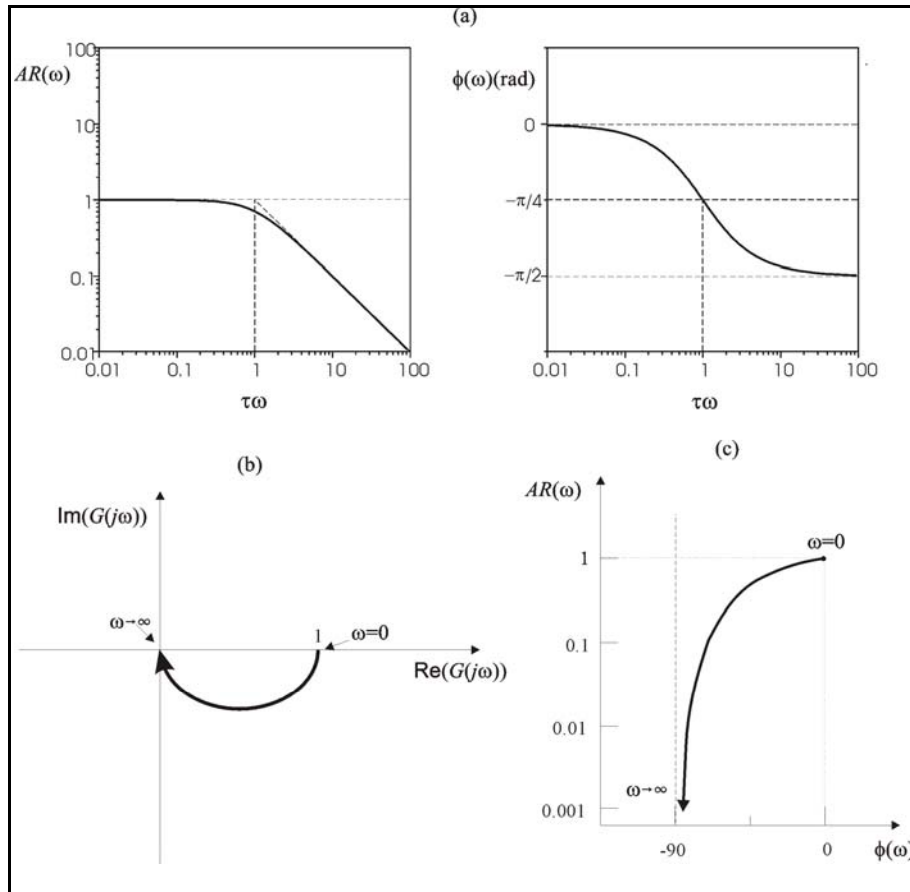
$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2}, \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = -\frac{\tau\omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \quad (2.8-29)$$

odnosno za amplitudnu i faznu karakteristiku:

$$AR(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \quad (2.8-30)$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\tau\omega) \quad (2.8-31)$$

Na slici 2.8-7. su prikazane frekventne karakteristike sistema prvog reda, u obliku Bodeovih, Nikvistovog i Nikolsovog dijagrama.



Slika 2.8-7. Frekventne karakteristike sistema prvog reda: (a) Bodeovi dijagrami; (b) Nikvistov dijagram; (c) Nikolsov dijagram

U vezi sa crtanjem Bodeovih dijagrama za ovaj sistem, treba naglasiti da se približni Bodeovi dijagrami mogu dobiti vrlo brzo korišćenjem asimptota za niske i visoke vrednosti frekvenciji. Kada  $\omega \ll 1/\tau$ ,  $AR \approx 1$ , tako da se kao asimptota za niske vrednosti frekvencije dobija horizontalna linija  $AR=1$ . Kada  $\omega \gg 1/\tau$ , amplitudna karakteristika sistema prvog reda teži  $-40$ . U ovoj oblasti frekvencija, izraz za amplitudnu karakteristiku se može aproksimirati izrazom:

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow AR(\omega) \rightarrow \frac{1}{\tau\omega}$$

Funkcija  $1/\tau\omega$ , koja predstavlja hiperbolu, se u logaritamskom koordinatnom sistemu koji se koristi za prikazivanje amplitudne karakteristike svodi na pravu, sa koeficijentom pravca  $-1$ , koja prolazi kroz tačku ( $\omega=1/\tau$ ,  $AR=1$ ). Ova tačka predstavlja presek asimptota za niske i visoke frekvencije i frekvencija koja joj odgovara ( $\omega=1/\tau$ ) se često naziva *prelomna frekvencija*. Odstupanje amplitudne karakteristike sistema prvog reda, definisane jednačinom (2.8-28) od ovih asimptota je najveće upravo za ovu frekvenciju, i u toj tački je tačna vrednost amplitudne karakteristike:

$$AR(1/\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = 0.707$$

Korišćenjem ove tačke i asimptota za niske i visoke frekvencije koje su prethodno definisane, Bodeov dijagram amplitudne karakteristike sistema prvog reda se može dobiti vrlo brzo i prilično precizno.

Uzimanjem graničnih vrednosti fazne karakteristike, definisane jednačinom (2.8-31) za  $\omega \ll 1/\tau$  i  $\omega \gg 1/\tau$ , dobijaju se sledeće asimptote za ovu funkciju:

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0 &\Rightarrow \phi \rightarrow -\arctan(0) = 0 \\ \omega \rightarrow \infty &\Rightarrow \phi \rightarrow -\arctan(\infty) = -\pi/2 \end{aligned}$$



Za karakterističnu vrednost prelomne frekvencije  $\omega=1/\tau$ , fazna karakteristika ima vrednost:

$$\phi(1/\tau) = -\arctan(1) = -\pi/4$$

Ova tačka istovremeno predstavlja prevojnu tačku na Bodeovom dijagramu fazne karakteristike sistema prvog reda.

Treba uočiti da jednačine sistema (2.8-29) predstavljaju parametarske jednačine kruga. Zbog toga se Nikvistov dijagram dobija u obliku polukruga u četvrtom kvadrantu, sa centrom u tački (1/2,0) i poluprečnikom 1/2.

#### 2.8.4.5. Frekventne karakteristike sistema drugog reda

Kada se u prenosnoj fankciji sistema drugog reda:

$$G(s) = \frac{I}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + I}$$

zameni  $s$  sa  $j\omega$ , dobija se sledeća kompleksna funkcija frekvencije:

$$G(j\omega) = \frac{I}{(I - \tau^2 \omega^2) + 2\xi\tau\omega j} = \frac{(I - \tau^2 \omega^2) - 2\xi\tau\omega j}{(I - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2} \quad (2.8-32)$$

Realni i imaginarni deo ove funkcije su:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{I - \tau^2 \omega^2}{(I - \tau^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 \tau^2 \omega^2}, \quad \operatorname{Im}(G(j\omega)) = -\frac{2\xi\tau\omega}{(I - \tau^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 \tau^2 \omega^2} \quad (2.8-33)$$

tako da se izrazi za amplitudnu i faznu karakteristiku dobijaju u obliku:

$$AR(\omega) = \frac{I}{\sqrt{(I - \tau^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 \tau^2 \omega^2}} = \frac{I}{\sqrt{(I - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2 (\omega/\omega_n)^2}} \quad (2.8-34)$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-2\xi\tau\omega}{I - \tau^2 \omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega/\omega_n}{I - (\omega/\omega_n)^2}\right) \quad (2.8-35)$$

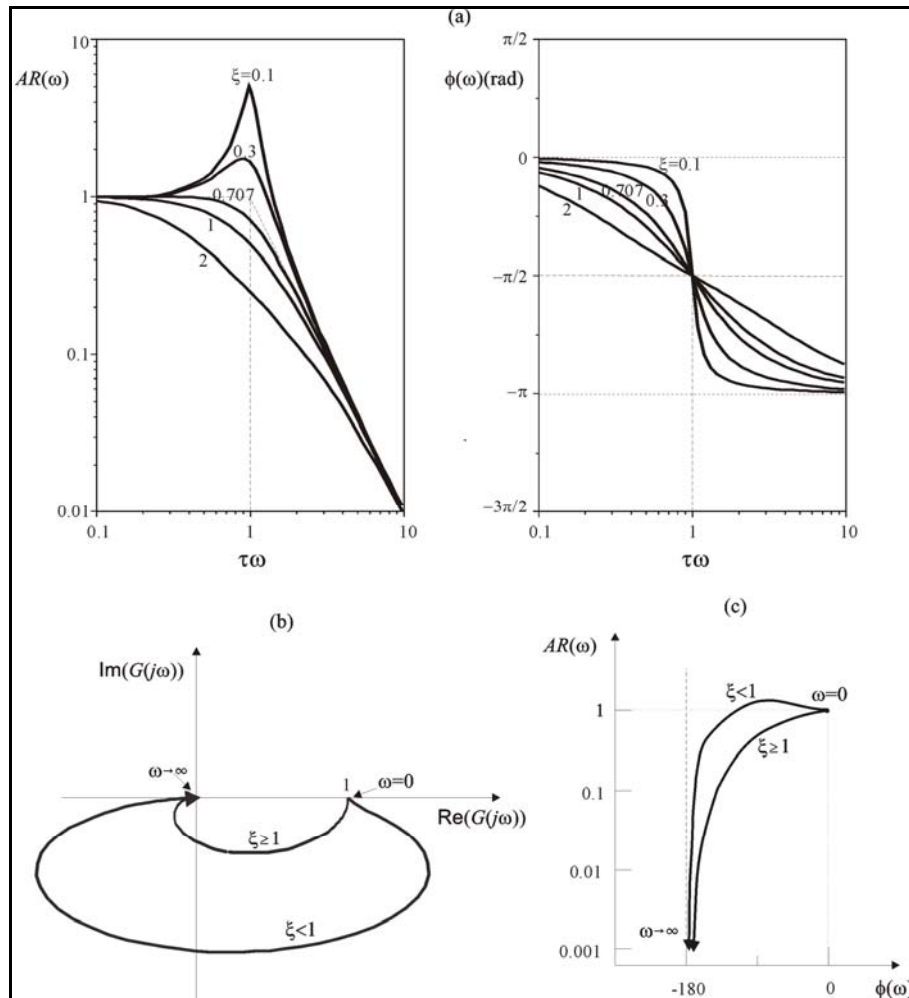
Ono što je karakteristično za frekventne karakteristike sistema drugog reda je da se, za neke vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$  dobijaju maksimumi amplitudne karakteristike. Nalaženjem prvog izvoda funkcije kojom je definisana amplitudna karakteristika (jednačina (2.8-34)) i određivanjem nule tog prvog izvoda, dobijaju se sledeći rezultati: *maksimum amplitudne karakteristike se javlja kod nedovoljno prigušenih sistema kod kojih je  $\xi < 0.707$* . Frekvencija pri kojoj se javlja maksimum je:

$$\omega_r = \frac{I}{\tau} \sqrt{I - 2\xi^2} = \omega_n \sqrt{I - 2\xi^2} \quad (2.8-36)$$

a vrednost maksimuma:

$$AR_{\max} = \frac{I}{2\xi\sqrt{I - \xi^2}} \quad (2.8-37)$$

Vrednost maksimuma raste sa smanjenjem koeficijenta prigušenja i teži beskonačnosti kada  $\xi \rightarrow 0$ . Frekvencija pri kojoj se javlja maksimum je nešto niža od sopstvene frekvencije sistema  $\omega_n$ , ali se sa smanjenjem  $\xi$  sve više približava ovoj vrednosti. Ova pojava da nedovoljno prigušen sistem drugog reda (za  $\xi < 0.707$ ) pojačava oscilacije ulazne promene, predstavlja zapravo rezonanciju, a frekvencija pri kojoj se javlja maksimum amplitudne karakteristike, definisana jednačinom (2.8-36) predstavlja *rezonantnu frekvenciju*.



Slika 2.8-8. Frekventne karakteristike sistema drugog reda: (a) Bodeovi dijagrami; (b) Nikvistov dijagram; (c) Nikolsov dijagram

Na slici 2.8-8. su prikazane frekventne karakteristike sistema drugog reda za nekoliko vrednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$ , u Bodeovim, Nikvistovom i Nikolsovom dijagramu. Pojava maksimuma amplitudne karakteristike sistema drugog reda se može uočiti u sve tri vrste dijagrama, ali je najuočljivija na Bodeovom dijagramu amplitudne karakteristike.

Povodom crtanja Bodeovih dijagrama sistema drugog reda, treba naglasiti da se i u ovom slučaju mogu upotrebiti asimptote za niske i visoke frekvencije. Pri tome se za Bodeov dijagram amplitudne karakteristike kao asimptota za niske frekvencije dobija horizontalna prava ( $\omega \ll 1/\tau$ ,  $AR \approx 1$ ), dok se kao asimptota za visoke vrednosti frekvencije dobija funkcija  $1/\tau^2 \omega^2$ , koja se u logaritamskom koordinatnom sistemu dobija u obliku prave sa nagibom  $-2$ , koja prolazi kroz tačku ( $\omega = 1/\tau$ ,  $AR = 1$ ). Prelomna frekvencija za sistem drugog reda je jednaka sopstvenoj frekvenciji sistema. Asimptote niske i visoke frekvencije za faznu karakteristiku su  $\phi \approx 0$  (za  $\omega \ll 1/\tau$ ) i  $\phi \approx -\pi$  (za  $\omega \gg 1/\tau$ ). Za vrednost prelomne frekvencije  $\omega = 1/\tau = \omega_n$ , fazna karakteristika je jednaka  $-\pi/2$  i ima prevojnu tačku.

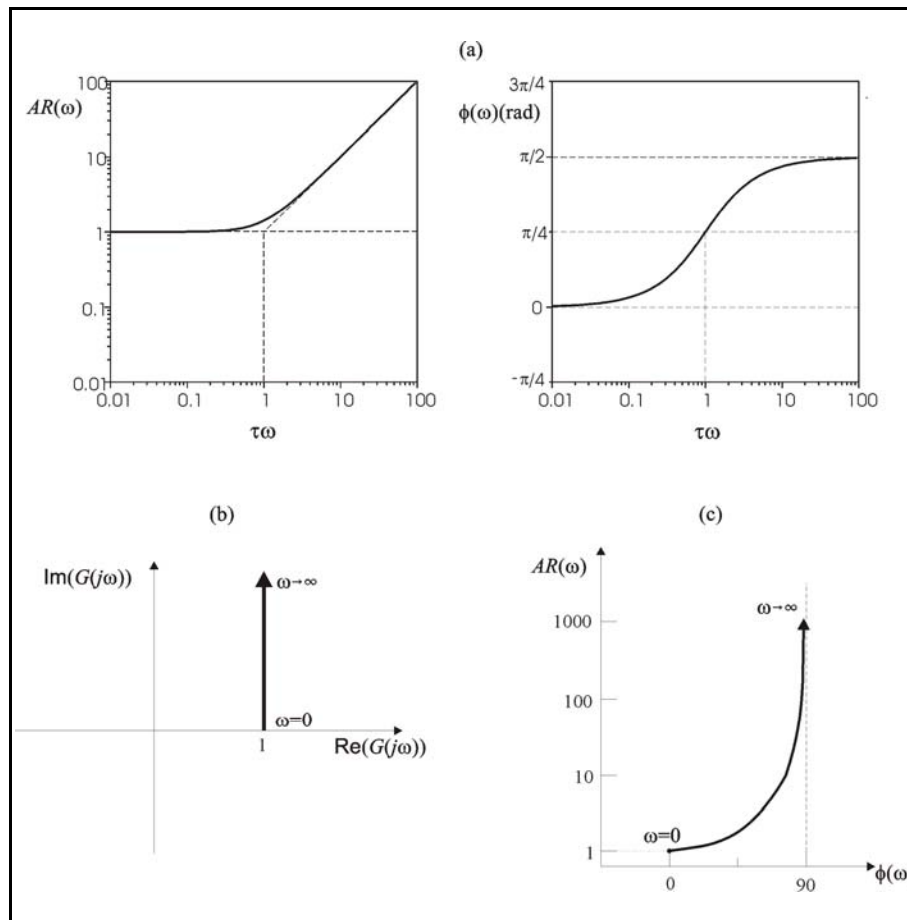
#### 2.8.4.6. Frekventne karakteristike diferencijalnog elementa

Predstavićemo i frekventne karakteristike idealnog diferencijalnog elementa koji ima prenosnu funkciju:

$$G(s) = \tau s + 1 \quad (2.8-38)$$

Iako ovakvi elementi ne mogu fizički da se realizuju, ovakva prenosna funkcija se često javlja kao element složenih prenosnih funkcija. Prenosna funkcija realnog diferencijalnog elementa se može prikazati kao proizvod idealnog diferencijalnog elementa i sistema prvog reda, tako da se njegove

frekventne karakteristike mogu dobiti na način prikazan u sledećem poglavlju.



Slika 2.8-9. Frekventne karakteristike diferencijalnog elementa prvog reda:  
 (a) Bodeovi dijagrami; (b) Nikvistov dijagram; (c) Nikolsov dijagram

$$G(j\omega) = 1 + \tau\omega j \quad (2.8-39)$$

čiji su realni i imaginarni deo:

$$\text{Re}(G(j\omega)) = 1, \quad \text{Im}(G(j\omega)) = \tau\omega \quad (2.8-40)$$

Odgovarajući izrazi za amplitudnu i faznu karakteristiku će biti:

$$AR(\omega) = \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \quad (2.8-41)$$

$$\phi(\omega) = \arctan(\tau\omega) \quad (2.8-42)$$

Bodeovi, Nikvistov i Nikolsov dijagram koji predstavljaju ove frekventne karakteristike, prikazani su na slici 2.8-9.

Kao što se vidi sa slike 2.8-9., fazna karakteristika diferencijalnog elementa ima pozitivne vrednosti između nule i  $+\pi/2$ , što znači da se kod ovog elementa ne javlja fazno kašnjenje, već izlaz ide ispred ulaza za fazni ugao  $\phi$ . Zbog toga se ovaj element često naziva *vodeći element* (engl. *lead*) prvog reda.

### 2.8.5. Frekventne karakteristike složenih sistema

Pogodnost prikazivanja dinamičkih karakteristika sistema u frekventnom domenu dolazi naročito do izražaja pri nalaženju frekventnih karakteristika složenih sistema sastavljenih iz dva ili više elemenata.

Ako imamo rednu vezu dva elementa čije su prenosne funkcije  $G_1(s)$  i  $G_2(s)$ , ukupna prenosna funkcija će biti jednaka njihovom proizvodu:

$$G_u(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (2.8-43)$$

Zamenom  $s$  sa  $j\omega$  u ovoj jednačini, dobija se rezultat da je frekventna prenosna funkcija složenog sistema jednaka proizvodu frekventnih prenosnih funkcija pojedinih elemenata sistema:

$$G_u(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) \quad (2.8-44)$$

Ako sve frekventne prenosne funkcije u jednačini (2.8-44) prikažemo kao kompleksne funkcije u Ojlerovom (Euler) obliku:

$$\begin{aligned} G_1(j\omega) &= |G_1(j\omega)| e^{j \arg(G_1(j\omega))} = AR_1(\omega) e^{j\phi_1(\omega)} \\ G_2(j\omega) &= |G_2(j\omega)| e^{j \arg(G_2(j\omega))} = AR_2(\omega) e^{j\phi_2(\omega)} \\ G_u(j\omega) &= |G_u(j\omega)| e^{j \arg(G_u(j\omega))} = AR_u(\omega) e^{j\phi_u(\omega)} \end{aligned} \quad (2.8-45)$$

jednačina (2.8-44) se može napisati u obliku:

$$AR_u(\omega) e^{j\phi_u(\omega)} = AR_1(\omega) e^{j\phi_1(\omega)} AR_2(\omega) e^{j\phi_2(\omega)} = AR_1(\omega) AR_2(\omega) e^{j(\phi_1(\omega) + \phi_2(\omega))} \quad (2.8-46)$$

Rezultat prikazan jednačinom (2.8-46) (koji je identičan sa poznatim rezultatom iz kompleksnog računa da je proizvod dva kompleksna broja kompleksni broj čiji je moduo jednak proizvodu modula, a argument jednak zbiru argumenata brojeva koji se množe), zapravo znači da je ukupna amplitudna karakteristika redne veze dva elementa jednaka proizvodu amplitudnih karakteristika tih elemenata, dok je ukupna fazna karakteristika jednaka zbiru faznih karakterisika pojedinih elemenata:

$$AR_u(\omega) = AR_1(\omega) AR_2(\omega) \quad (2.8-47)$$

$$\phi_u(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) \quad (2.8-48)$$

Ovaj rezultat se naravno može generalizovati. Za rednu vezu  $n$  elemenata, čija je prenosna funkcija:

$$G_u(s) = G_1(s)G_2(s)\cdots G_n(s) \quad (2.8-49)$$

ukupna amplitudna karakteristika će biti jednaka proizvodu amplitudnih karakteristika svih pojedinačnih elemenata:

$$AR_u(\omega) = AR_1(\omega) AR_2(\omega) \cdots AR_n(\omega) \quad (2.8-50)$$

dok će ukupna fazna karakteristika biti jednaka zbiru faznih karakteristika svih pojedinačnih elemenata:

$$\phi_u(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \cdots + \phi_n(\omega) \quad (2.8-51)$$

Pogodnosti ovako jednostavnog dobijanja frekventnih karakteristika složenih sistema naročito dolaze do izražaja ukoliko se za njihovo prikazivanje koriste Bodeovi dijagrami, jer se množenje prenosnih funkcija, odnosno frekventnih karakteristika, svodi na grafičko sabiranje krivih kojima su definisane amplitudne i fazne karakteristike pojedinih elemenata. Ovakav postupak dobijanja ukupne fazne karakteristike direktno sledi na osnovu jednačine (2.8-51). Činjenica da se amplitudna karakteristika proizvoda u Bodeovom dijagramu dobija grafičkim sabiranjem amplitudnih karakteristika pojedinih elemenata je, sa druge strane posledica korišćenja logaritamske skale za prikazivanje amplitudne karakteristike i činjenice da je logaritam proizvoda jednak zbiru logaritama:

$$\log(AR_1 AR_2) = \log AR_1 + \log AR_2$$

Kao direktna posledica ovoga, množenje konstantom (koja predstavlja proporcionalni element čija je amplitudna karakteristika jednaka toj konstanti, a fazna karakteristika jednaka nuli) se, u Bodeovim dijagramima, svodi na dodavanje amplitudnoj karakteristici konstantne vrednosti koja je jednaka  $\log K$ , odnosno na translatorno pomeranje u vertikalnom pravcu za  $\log K$ . Fazna karakteristika se pri množenju konstantom ne menja. Pri sabiranju amplitudnih i faznih karakteristika u Bodeovim dijagramima treba voditi računa o znaku, pri čemu su nulte linije oko kojih se vrši sabiranje  $AR=1$  ( $\log AR=0$ ) i  $\phi=0$ .

Jednostavnost postupka dobijanja frekventnih karakteristika složenih sistema ćemo ilustrovati na nekoliko primera.

PRIMER 2.8-2. Frekventne karakteristike serije od  $n$  identičnih sistema prvog reda

Jedan od karakterističnih sistema višeg reda je redna veza  $n$  sistema prvog reda čiju smo prenosnu funkciju definisali u poglavlju 2.3.4. Posebno je interesantna serija u kojoj su svi elementi identični, koja se može prikazati sledećom prenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{K^n}{(\tau s + 1)^n} \quad (\text{P-2.8.2-1})$$

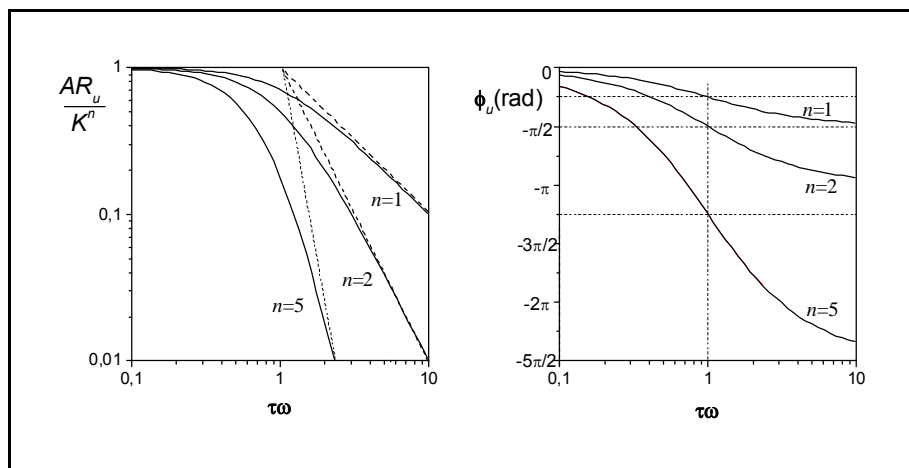
Vremenske odzive ovog sistema na stepenastu, impulsnu i linearnu promenu ulaza smo dali u poglavlju 2.7.5., a sada ćemo prikazati izraze za njegov frekventni odziv.

Direktnom primenom jednačina (2.8-50) i (2.8-51), uz napomenu da su amplitudne karakteristike svih elemenata u seriji jednake, kao i njihove fazne karakteristike, dobijaju se sledeći izrazi za amplitudnu i faznu karakteristiku serije od  $n$  elemenata:

$$AR_u(\omega) = \left( \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \right)^n \quad (\text{P-2.8.2-2})$$

$$\phi_u = -n \arctan(\tau \omega)$$

Grafički prikaz ovih frekventnih karakteristika u Bodeovim dijagramima, za nekoliko vrednosti broja stupnjeva u seriji, je dat na slici P-2.8.2.



Slika P-2.8.2. Bodeovi dijagrami serije od  $n$  identičnih sistema prvog reda za različite vrednosti broja stupnjeva u seriji

Kao što se vidi, asimptota za niske frekvencije u dijagramu amplitudne karakteristike je ista kao za jedan sistem prvog reda (prava  $AR=1$ ), dok je asimptota za visoke frekvencije prava sa koeficijentom pravca  $-n$ . Fazna karakteristika sistema  $n$ -tog reda se kreće u intervalu od 0 do  $-n\pi/2$ .

## PRIMER 2.8-3. Frekventne karakteristike kombinacije sistema prvog reda i elementa sa mrtvim vremenom

Prenosna funkcija oblika:

$$G(s) = \frac{e^{-Ds}}{\tau s + 1} \quad (\text{P-2.8.3-1})$$

koja predstavlja rednu vezu sistema prvog reda i elementa sa mrtvim vremenom se vrlo često koristi za aproksimaciju dinamičkih karakteristika objekata upravljanja u procesnoj industriji. Izvešćemo izraze za frekventne karakteristike ovog sistema i prikazati ih u Nikvistovom i Bodeovim dijagramima, za vrednosti parametara  $\tau=1$  min,  $D=0.1$  min.

Prenosnu funkciju sistema ćemo prikazati kao proizvod dve prenosne funkcije: sistema prvog reda i elementa sa mrtvim vremenom:

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{I}{\tau s + I} e^{-Ds} \quad (\text{P-2.8.3-2})$$

Amplitudne i fazne karakteristike elemenata su:

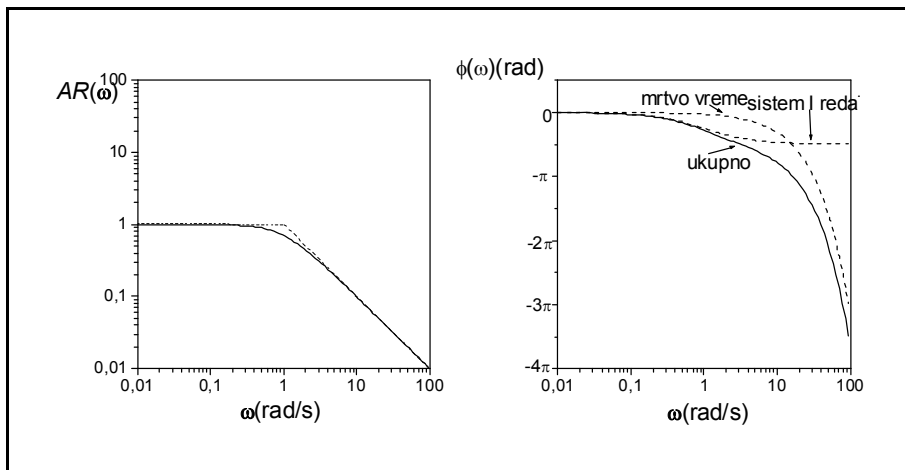
$$G_1(s) = \frac{I}{\tau s + I} : AR_1(\omega) = \frac{I}{\sqrt{I + \tau^2 \omega^2}}, \phi_1(\omega) = -\arctan(\tau \omega) \quad (\text{P-2.8.3-3})$$

$$G_2(s) = e^{-Ds} : AR_2(\omega) = I, \phi_2(\omega) = -D\omega [\text{rad}] \quad (\text{P-2.8.3-4})$$

Na osnovu jednačina (2.8-50) i (2.8-51), ukupna amplitudna i fazna karakteristika će biti:

$$AR_u(\omega) = AR_1(\omega) AR_2(\omega) = \frac{I}{\sqrt{I + \tau^2 \omega^2}} \quad (\text{P-2.8.3-5})$$

$$\phi_u = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) = -\arctan(\tau \omega) - D\omega \quad (\text{P-2.8.3-6})$$



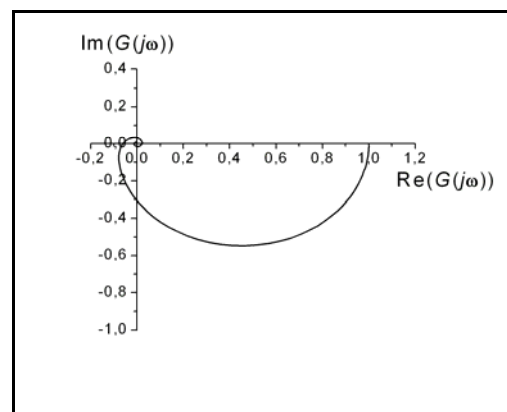
Slika P-2.8.3-1. Bodeovi dijagrami sistema prvog reda sa mrtvim vremenom

Bodeovi dijagrami ovog sistema, za  $\tau=1$  i  $D=0.1$  su prikazani na slici P-2.8.3-1. Na slici su, pored ukupne karakteristike složenog sistema, prikazane i karakteristike pojedinih elemenata. Treba primetiti da je amplitudna karakteristika identična sa amplitudnom karakteristikom sistema prvog reda, odnosno da element sa mrtvim vremenom ne utiče na amplitudnu karakteristiku sistema. Zbog prisustva mrtvog vremena, fazna karakteristika teži  $-4$  kada frekvencija teži beskonačnosti.

Crtanje Nikvistovog dijagrama je jednostavnije ukoliko su poznati realni i imaginarni deo, koji se mogu dobiti iz amplitudne i fazne karakteristike:

$$\text{Re}(G(j\omega)) = AR_u(\omega) \cos(\phi_u(\omega)) \quad (\text{P-2.8.3-7})$$

$$\text{Im}(G(j\omega)) = AR_u(\omega) \sin(\phi_u(\omega))$$



Slika P-2.8.3-2. Nikvistov dijagram sistema prvog reda sa mrtvim vremenom ( $\tau=1$ ,  $D=0.1$ )

Nyquis-ov dijagram (za  $\tau=1$  i  $D=0.1$ ) je prikazan na slici P-2.8.3-2. Treba primetiti da se hodograf vektora  $G(j\omega)$  u ovom slučaju dobija u obliku spirale oko koordinatnog početka.

## 2.9. VEZE IZMEĐU VREMENSKOG, LAPLASOVOG I FREKVENTNOG DOMENA

Kao što smo u prethodnim poglavljima pokazali, dinamika linearnih sistema sa konstantnim nagomilanim parametrima se može prikazati na tri alternativna načina: u vremenskom domenu (u obliku jedne ili sistema diferencijalnih jednačina), u Laplasovom (u obliku prenosne funkcije) i u frekventnom domenu (u obliku amplitudno-faznih karakteristika, odnosno frekventne prenosne funkcije).

## 2.9.1. Poređenje dinamičkih karakteristika u vremenskom, Laplasovom i frekventnom domenu

LAPLASOV DOMEN	$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\xi\tau_2 s + 1)}$ <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>\tau_1 &lt; \tau_2</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math>\tau_1 &gt; \tau_2</math>  </div> </div> <p>POLOVI U <math>s</math>-RAVNI</p>
VREMENSKI DOMEN	$(\tau_1 \tau_2^2) \frac{d^3 y}{dt^3} + (\tau_2^2 + 2\tau_1 \tau_2 \xi) \frac{d^2 y}{dt^2} + (\tau_1 + 2\tau_2 \xi) \frac{dy}{dt} + y = K x(t)$ <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>\tau_1 &lt; \tau_2</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math>\tau_1 &gt; \tau_2</math>  </div> </div> <p>STEPENASTI ODZIV</p>
FREKVENTNI DOMEN	$AR(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 + \tau_1^2 \omega^2)((1 - \tau_2^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 \tau_2^2 \omega^2)}}$ $\phi(\omega) = -\arctan(\tau_1 \omega) - \arctan\left(\frac{2\xi\tau_2\omega}{1 - \tau_2^2\omega^2}\right)$ <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>\tau_1 &lt; \tau_2</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math>\tau_1 &gt; \tau_2</math>  </div> </div> <p>BODEOVI DIJAGRAMI</p>

Slika 2.9-1. Dinamičke karakteristike dva nedovoljno prigušena sistema trećeg reda u Laplasovom, vremenskom i frekventnom domenu

U svakom od ova tri domena se koriste pogodni načini grafičkog prikazivanja dinamičkih karakteristika sistema. U vremenskom domenu je to vremenski odziv na neku standardnu (najčešće jediničnu stepenastu) promenu ulaza. U Laplasovom domenu se vrlo često koristi grafičko predstavljanje korena karakteristične jednačine ili polova i nula sistema u kompleksnoj  $s$ -ravni. U frekventnom domenu se koristi grafički prikaz frekventnih karakteristika u Bodeovim, Nikvistovom ili Nikolsovom dijagramu.

Paralela u prikazivanju dinamike sistema u vremenskom, Laplasovom i frekventnom domenu biće ilustrovana na primeru sistema trećeg reda. Za analizu su odabrana dva slučaja nedovoljno prigušenog stabilnog sistema trećeg reda, sa dva konjugovano-kompleksna i jednim realnim polom i bez nula, i to takvi da je kod prvog dominantan par konjugovano-kompleksnih korena, a kod drugog realni koren. Pod *dominantnim korenom* podrazumevamo koren karakteristične jednačine koji je najbliži imaginarnoj osi, jer on odgovara najsporijem stupnju sistema i zbog toga najviše utiče na ukupnu brzinu odziva.

Paralelni prikaz dinamičkih karakteristika u sva tri domena je dat na slici 2.9-1. Dinamičke karakteristike su prikazane preko odgovarajućih matematičkih modela (preko prenosne funkcije u Laplasovom, diferencijalne jednačine u vremenskom, i izraza za amplitudnu i faznu karakteristiku u frekventnom domenu) i grafički (u Laplasovom domenu su prikazani polovi sistema u  $s$ -ravni, u vremenskom domenu odziv na jediničnu stepenastu promenu ulaza i u frekventnom domenu Bodeovi dijagrami amplitudne karakteristike). Ova slika pokazuje da prisustvo para konjugovano-kompleksnih korena kod oba sistema rezultuje pojavom oscilacija u stepenastom odzivu sistema i pojavom maksimuma amplitudne karakteristike (za  $\xi < 0.707$ ). Međutim, u slučaju kada sistem ima par dominantnih konjugovano-kompleksnih korena, njegovo ponašanje je približno ponašanju nedovoljno prigušenog sistema drugog reda sa istim koeficijenom prigušenja, dok je u slučaju dominantnog realnog korena njegovo ponašanje bliže ponašanju sistema prvog reda i oscilacije nisu dominantne u njegovom odzivu.

### 2.9.2. Konverzija modela iz jednog domena u drugi

Kada je poznat dinamički model sistema u jednom domenu, moguće je uvek dobiti i ostala dva oblika. Daćemo ukratko pregled postupaka za konverziju modela iz jednog u drugi domen.

1. Laplasov u frekventni domen. Zamenom  $s$  sa  $j\omega$  u prenosnoj funkciji sistema dobija se frekventna prenosna funkcija čiji je moduo amplitudna, a argument fazna karakteristika.
2. Frekventni u Laplasov domen. Aproksimacijom Bodeovih dijagrama dobija se prenosna funkcija sistema. Ovaj postupak će biti detaljnije opisan i ilustrovan primerima u trećem delu knjige, u poglavlju 3.1.3.
3. Vremenski u Laplasov domen. Primenom Laplasove transformacije na diferencijalnu jednačinu i nalaženjem odnosa Laplasovih transformacija izlaza i ulaza dobija se prenosna funkcija sistema.
4. Laplasov u vremenski domen. Nalaženjem inverzne Laplasove transformacije za definisanu promenu ulaza dobija se vremenski odziv sistema.
5. Vremenski u frekventni domen. Uobičajeno je prevođenje u Laplasov domen primenom Laplasove transformacije, a zatim, zamenom  $s$  sa  $j\omega$  prevođenje u frekventni domen u oblik frekventne prenosne funkcije. Isti rezultat se može dobiti direktnom primenom Furijeove transformacije na diferencijalnu jednačinu i nalaženjem odnosa Furijeovih transformacija izlaza i ulaza.
6. Frekventni u vremenski domen. Ova konverzija se može izvršiti posredno, preko Laplasovog domena, ali je moguća i direktna konverzija primenom inverzne Furijeove transformacije.